Chapitre 2 (Rappel)

Notions de bases de probabilités

I. Notions de probabilités

Introduction

L'objectif de la théorie des probabilités est de fournir un formalisme mathématique précis, propre à décrire des situations dans lesquelles intervient le "hasard", c'est-à-dire des situations dans lesquelles un certain nombre de conditions étant réunies (les causes), plusieurs conséquences sont possibles (les effets) sans que l'on puisse a priori savoir laquelle sera réalisée. Une telle situation apparaît lors d'une expérience aléatoire ou stochastique (par opposition à une expérience déterministe pour laquelle l'issue est certaine).

I.1 Espaces probabilisables

I.1.1 Expérience aléatoire et événements

Définition 1:

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.

Exemples :

1. « Lancer un dé et noter le résultat obtenu » est une expérience aléatoire comportant 6 résultats ou issues ; l'ensemble Ω de toutes les issues est dans cet exemple $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
2. On mesure la durée du bon fonctionnement d'un dispositif technique choisi au hasard parmi un grand nombre de dispositifs identiques.
3. On lance trois fois de suite la même pièce de monnaie. Si l'on désigne par P la sortie du côté "pile" et par F la sortie du côté "face", on peut distinguer huit cas possibles: PPP, PPF, PFP, · · · , FFF.

Définition 2:

Événement, événements « A ou B », « A et B » et complémentaire

Langage des évènements	Langage des ensembles	Notations	Exemples avec le jet d'un dé
A est un évènement	A est une partie de	$A \subset$	A obtenir un nombre pair $A = \{2,4,6\}$
C est l'évènement « A ou B »	C est la réunion de A et B	$C = A \bigcup B$	A obtenir 5, B : obtenir 2,4,5 ou 6 , C : obtenir {2,4,5,6}
E est l'évènement « A et D »	E est l'intersection de A et D	$E = A \bigcap D$	D : obtenir multiple de 3, E={6}
A et F Sont des évènements complémentaires	A et F sont complémentaires	$F = \overline{A}$	A : obtenir un nombre pair F : obtenir un nombre impair

I.1.2 Univers des possibles

Définition 3

On représente le résultat de cette expérience comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles. On appelle l'ensemble Ω l'espace des éventualités, ou l'univers des possibles.

Un événement aléatoire (ou plus simplement un événement) est une assertion ou proposition logique relative au résultat de l'expérience (par exemple, la somme des points est paire). On dira qu'un événement est réalisé ou non suivant que la proposition est vraie ou fausse une fois l'expérience accomplie. Donc, à un événement, on peut associer la partie de Ω constituée de tous les résultats réalisant l'événement. Nous décidons :

Définition 4

Un événement A est une partie de Ω, c'est-à-dire A ∈ P(Ω).

Si l'événement est réduit à un seul élément, on parle d'événement élémentaire.

I.1.3 Terminologie des événements aléatoires :

1. Un évènement A est certain si $A \neq \phi$
2. Un évènement A est impossible si $A = \phi$
3. $\overline{A}$ est l'évènement contraire d'un évènement A si $\overline{A} = \Omega / A$

   $\overline{A}$ Est réalisé si A ne l'est pas, et réciproquement : $\omega \in \overline{A}$ si et seulement si $\omega \notin A$
4. Deux évènement A_1 *et* A_2 sont incompatibles si $A_1 \bigcap A_2 = \phi$

2. Espace probabilisable

Définition :

On appelle espace probabilisable une paire (Ω, τ) dans laquelle Ω est un ensemble quelconque et τ une collection de sous-ensembles de Ω appelée tribu (on dit tribu d'événements) qui répond par définition aux contraintes (axiomes) suivantes :

1. $\Omega \in \tau$
2. Si $E \in \tau$ alors $\overline{E} \in \tau$ ou $\overline{E}$ désigne le complément de E dans Ω
3. Si $E \in \tau$ et $F \in \tau$ alors $E \bigcup F \in \tau$
4. pour toute famille d'événements E_i , $i \in I$ où I est un ensemble dénombrable d'indices $\bigcup_i E_i \in \tau$

2.1 Espace probabilisé (Ω, E, P)

Définition 5

Soit (Ω, ζ) un espace probabilisable. Une probabilité est une application P réelle définie sur ζ vérifiant les trois axiomes suivant appelés axiomes de KOLMOGOROV

1. $p : \zeta \to R^+$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Pour toute suite finie ou dénombrable d'évènements deux a deux incompatibles

$$P\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) = \sum_{n\in I} P(A_n)$$

2.2 Espace probabilisé
Définition 6
Un espace probabilisé est la donnée d'un triplet (Ω, E, P) avec
• (Ω, E) un espace probabilisable,
• P une probabilité sur E.
2.3 Propriétés élémentaires
On a les propriétés suivantes pour tout $(A,B)\in \xi^2$

1. $P(\Omega)=1, \quad P(\phi)=0$
2. $P(\overline{A})=1-P(A)$
3. $P(A)\in[0,1]$
4. $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$
5. Si $A\subset B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

Systèmes complets d'événements

Définition :

Soit (Ω, A, p)un espace probabilisé au plus dénombrable. Soit $(A_n)_{n\in N} \in A^N$
$(A_n)_{n\in N}$ est un système complet d'événements si :

1. les événements$(A_n)_{n\in N}$, sont deux à deux disjoints
2. $\bigcup_0^{+\infty} A_n = \Omega$

Théorème de probabilité totale :

Soit $\{B_i : i\in I\}$ Un <u>système complet</u> d'évènements, alors

$$P(A)=\sum_{i\in I} P(A\bigcap B_i)$$

Pour la preuve elle découle directement des axiomes de Kolmogorov

2.4 Équiprobabilité
Un cas particulier important est le cas d'équiprobabilité quand Ω est de cardinal fini. On dit qu'il y a équiprobabilité dans le cas où les événements élémentaires ont tous la même probabilité. On a alors les résultats suivants, si **Ω** = {ω1, ω2, · · · , ω_n}.

Et plus généralement $\forall\, i\in[1,n], \quad P(\{\ \omega_i\})=\dfrac{1}{n}$

$$\forall\ A\in\zeta, P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{nombre\ de\ cas\ \ favorables}{nombre\ de\ cas\ \ possibles}$$

Remarque
Le calcul des probabilités peut, alors, se ramener à des calculs de dénombrement, il faut déterminer le cardinal d'ensembles.

3. Lois de probabilités conditionnelles, indépendance

Définition 7:
Le but de ce paragraphe est de modéliser ce que l'on entend par
• deux événements sont indépendants.
• la réalisation d'un événement conditionne la réalisation d'un autre.
La notion de probabilité conditionnelle peut être nécessaire à chaque fois que pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, on dispose d'une information partielle. Si on sait que l'événement A est réalisé, pour que l'événement B se réalise, on est amené à regarder l'événement A ∩ B, puis à normaliser. Nous prenons la propriété-définition suivante :

Définition 8 (Probabilité conditionnelle).
Soit (Ω,ζ,P) un espace probabilisé et A un évènement possible $(P(A)\neq 0)$, l'application

$$P_A : \begin{cases} \zeta \to [0,1] \\ B \to P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{cases}$$

Est une probabilité sur (Ω,ζ) appelée probabilité conditionnelle sachant A

Remarque

- PA(B) peut se lire aussi "probabilité de B quand A" ou "probabilité de B si A" ou probabilité de B sachant A
- Une autre notation est souvent utilisée : P(B|A). Elle a l'inconvénient que "B|A" n'est pas un événement et que P est définie pour une partie de **Ω**; mais cette notation a l'avantage d'être "parlante". Dans la suite de ce polycopié, on utilisera dorénavant cette notation.
- Il sera nécessaire d'étendre ultérieurement la notion de probabilité conditionnelle lorsque A est de probabilité nulle.

Une conséquence immédiate de la définition est la formule des probabilités composées P (A ∩ B) = P(A) · P(B|A) C'est souvent sous cette forme que sera utilisé le conditionnement, ainsi que sous sa forme généralisée.

Proposition
Soient $A_1, A_2,..., A_n$ des évènements d'un espace probabilisé vérifiant

$P(A_1 \cap A_2,...,\cap A_{n-1}) \neq 0$ Alors on a

$$P(A_1 \cap A_2,...,\cap A_n) = P(A_1)P(A_1 / A_2).P(A_3 / A_1 \cap A_2)....P(A_n / A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

3.2 Proposition (Formule des probabilités totales).

Soient (Ω,ξ,P) un espace probabilisé et $\{A_i\}$ un système complet d'évènements tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout évènement B on a

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)=P(A_1)P(B/A_1).+...+P(A_n)P(B/A_n)$$

Preuve. On sait que
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$ et, en appliquant la formule des probabilités composées, on obtient le résultat énoncé.

Exemple :

Trois usines fabriquent des pièces de même nature. Dans l'usine A, 1% des pièces sont défectueuses, dans l'usine B, 10% des pièces sont défectueuses et dans l'usine C, 3% des pièces sont défectueuses. On mélange en proportions égales, les productions en provenance de chacune des trois usines et l'on en tire une pièce au hasard. L'espace Ω est formé des pièces, c'est un ensemble fini, il est acceptable de supposer qu'il y a équiprobabilité. Introduisons les événements suivants

• D : {la pièce tirée est défectueuse},
• A_1 : {la pièce provient de l'usine A},
• A2 : {la pièce provient de l'usine B},
• A_3 : {la pièce provient de l'usine C}.

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(D/A_1)=\frac{1}{100},P(D/A_2)=\frac{1}{10},P(D/A_3)=\frac{3}{100}$$

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que la pièce tirée soit défectueuse est $P(D)=P(D\cap A_1)+P(D\cap A_2)+P(D\cap A_3)=\frac{7}{150}$

3.3 Indépendance (stochastique)

Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité de B, autrement dit si

$$P(B/A)=P(B)$$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$$

Définition 9

Soient A et B deux événements appartenant à la même algèbre E, on dit que A et B sont deux événements (stochastiquement) indépendants pour la probabilité P si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Remarque

Cette condition est beaucoup plus forte que l'indépendance deux à deux, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple

Du jet de deux dés, montrons que le fait que trois événements A, B, C soient deux à deux indépendants n'implique pas que l'on ait
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ ni vice versa, le fait que l'égalité précédente se trouve vérifiée n'implique pas que les trois événements soient deux à deux indépendants. Ici, $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \cdots, (6, 5), (6, 6)\}$, et il y a équiprobabilité. Soient i et j étant deux nombres entiers compris entre 1 et 6, on a

Considérons maintenant les trois événements suivants

$$\text{A: “}i\text{ est pair”}; \qquad \text{B : “ }j\text{ est impair”}; \qquad \text{C: “}i+j\text{ est pair”}$$

On vérifie aisément (en comptant) que $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{C}) = \frac{1}{2}$

D'autre part, on a

- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$: “i est pair, j est impair”
- $\mathrm{B} \cap \mathrm{C}$: “i est impair, j est impair”
- $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$: “i est pair, j est pair”

et
$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{B})$$

De même $\mathbf{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathbf{P}(\mathrm{B}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{C})$ et $\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{C})$. On en conclut que pris deux à deux les événements A, B, C sont indépendants (pour la probabilité $\mathbf{P}$). Cependant

$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) \neq \mathbf{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{B}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{C})$$

Considérons maintenant l'événement

$$\mathrm{D} = \text{“}1 < i \cdot j \leqslant 3\text{”} = \{(1,2), (2,1), (3,1), (1,3)\}$$

où $i \cdot j$ représente le produit des indices i et j. On a $\mathbf{P}(\mathrm{D}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. D'autre part,

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{D} = \{(2,1)\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{D}) = \frac{1}{36} = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{B}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{D})$$

Cependant $\qquad \mathrm{B} \cap \mathrm{D} = \{(2,1), (3,1), (1,3)\} \quad$ et $\quad \mathbf{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) = \frac{1}{12} \neq \mathbf{P}(\mathrm{B}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{D})$

Les événements B et D ne sont pas indépendants.

3.4 Formules de Bayes

Ces formules ont pour but d'exprimer $P(A|B)$ en fonction de $P(B|A)$. Étant donnés deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a :
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$ .Ce qui donne la première formule de Bayes

Proposition (Formule de Bayes)

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B / A_j)}$$

$$Si \quad P(A) \neq 0 \; et \; P(B) \neq 0, alors :$$

$$P(A / B) = \frac{P(B / A).P(A)}{P(B)}$$

Proposition (Deuxième formule de Bayes)

Soit {Ai} un système complet d'événements tous de probabilité non nulle, pour tout événement B de probabilité non nulle, on a :

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B / A_j)}$$

Exemple

Reprenons l'exemple précèdent On tire au hasard une pièce, qui se trouve être défectueuse. La probabilité que cette pièce ait été fabriquée par l'usine A vaut P(A1|D). Selon la formule de Bayes

$$P(A_1 / D) = \frac{P(A_1)P(D / A_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(A_j).P(D / A_j)} = \frac{1}{14}$$

Exercice

Mal de tête En cas de migraine, trois personnes sur cinq prennent un traitement A et deux sur cinq prennent un médicament alternatif B. Avec le médicament A, 75% des migraineux sont soulagés, contre 90% avec le médicament B. On note simple A, B, S, les évènements "prendre le médicament A", "prendre le médicament B", "être soulagé". L'énoncé fournit les informations suivantes :

P(A) = 3 /5 , P(B) = 2/ 5 P(S|A) = 75 /100 , P(S|B) = 90 /100 .

1. Quelle est la probabilité de prendre le médicament B et d'être soulagé ?
2. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
3. Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris le médicament A sachant qu'il est soulagé ?

Solution

1. Par définition de la probabilité conditionnelle, on a

P (B ∩ S) = P(S|B) P(B) = 90/ 100 × 2 /5 = 9 /25.

1. D'après la formule des probabilités totales, on a

P(S) = P (S|A) P (A) + P (S|B) P (B) = 75/ 100 × 3 /5 + 90 /100 × 2/ 5 = 81/ 100.

2. D'après la formule d'inversion du conditionnement, on a

P (A|S) = P (S|A) P (A) P(S) = 75/ 100 × 3/ 5 × 100/ 81 = 15/ 27.

Exercice 4.

Au cours de la fabrication d'un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notes T1 et T2. On prélève au hasard une lentille dans la production.

On désigné par A l'évènement : "la lentille présente un défaut pour le traitement T1".

On désigne par B l'évènement : "la lentille présente un défaut pour le traitement T2". Une étude a montré que :

• la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T1 est P(A) = 0, 10 ;

• la probabilité qu'une lentille présente un d´défaut pour le traitement T2 est P(B) = 0, 20 ;

• la probabilité qu'une lentille présente aucun des deux défauts est 0, 75.

1. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.
2. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements T1 et T2.
3. Les évènements T1 et T2 sont-ils indépendants ?
4. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
5. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant qu'il présente un défaut pour le traitement T1.

Solution :

Correction 4 1. $\mathbf{P}(A \cup B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$

2. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,25 = 0,05$
3. Non car $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$
4. L'événement "la lentille présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2" est représenté par :

$$D = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$$

Ainsi $\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = (\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)) + (\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)) = \cdots = 0,2$

5. $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$

4. Techniques et méthodes de calcul des probabilités

✓ Comment calculer des probabilités sous l'hypothèse d'équiprobabilité ?

Soit P l'équiprobabilité défini sur un univers Ω. On souhaite calculer P(A) pour un évènement $A \subset \Omega$

1. Dénombrer le cardinal de Ω
2. Dénombrer le cardinal de A
3. Calculer $P(A) = \dfrac{card(A)}{Card(\Omega)}$

✓ Comment déterminer le cardinal d'un ensemble ?

On rappelle trois principes :

1. Pour dénombrer une réunion disjointe de sous-ensembles, ce qui revient à considérer un cas ou bien un autre ou bien un autre, etc..., on effectue la somme des cardinaux de chaque sous-ensemble.
2. Pour dénombrer un produit cartésien d'ensembles, ce qui revient à considérer un cas puis un autre puis un autre, etc..., on effectue le 3. produit des cardinaux de chaque ensemble.
3. Parfois il est plus facile de dénombrer le complémentaire d'un ensemble.

Par exemple, si A $\subset$ B et

$que\, l'on\, connait\, card(B) \quad et\, card'(\overline{A}), alors \quad card(A) = Card(B) - Card(\overline{A})$

On se ramène à un des deux cas suivants :

1. Tirages de p éléments parmi n :

Tirages	Ordonnés	Non ordonnés
Sans remise	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Avec remise	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

2. Rangement de p objets dans n cases :

Objets	Discernables	Indiscernables
Un seul dans chaque case	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Éventuellement plusieurs dans chaque case	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

✓ Comment calculer des probabilités conditionnelles ?

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω. On cherche a calculer la probabilité de A sachant B P (A/B)

- Vérifier si le texte fournit cette information en langage commun ou non

- Utiliser la définition $P(A/B = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- Si on connait P (B/A) et $P(B/\overline{A})$ alors :

$$P(A/B = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))} = \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}$$

$$= \frac{P(A).P(B/A)}{P(A).P(B/A)+P(\overline{A}).P(B/\overline{A})}$$

✓ Comment vérifier que deux évènements sont indépendants pour une probabilité ?

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω.

1. Déterminer l'évènement représenté par A ∩ B et calculer P (A ∩ B). Calculer P(A) × P(B).
2. Les deux évènements sont indépendants si et seulement si P (A ∩ B) = P(A) × P(B).

✓ Comment calculer la probabilité d'une conjonction de deux évènements ?

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω. On cherche à calculer la probabilité de $P(A\cap B)$

- On sait que A et B sont indépendants pour la probabilité P .Utiliser la formule $P(A\cap B) = P(A).P(B)$
- On ignore si A et B sont indépendants pour la probabilité P, alors :
  - Si $P(A)\neq 0$ et P (B/A) est connue utiliser la formule $P(A\cap B) = P(A).P(B/A)$
  - SI $P(B)\neq 0$ et P (A/B) est connue utiliser la formule $P(A\cap B) = P(B).P(A/B)$
  - Si $P(A\cup B)$ est connue utiliser la formule $P(A\cap B) = P(A)+P(B).-P(A\cup B)$
  - Si $P(\overline{A\cap B})$ ou $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ ou $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ sont connues, exprimer $A\cap B$ en fonction de $\overline{A\cap B}$ ou $\overline{A}\cup\overline{B}$ ou $\overline{A}\cap\overline{B}$ et utiliser les formules de probabilités classique par exemple on obtient les expressions suivantes :

✓ $P(A\cap B) = 1 - P(\overline{A\cap B})$

✓ $P(A\cap B) = 1 - P(\overline{A}\cup\overline{B})$

✓ $P(A\cap B) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A}\cap\overline{B})$

Si non essayer de trouver un évènement E de probabilité connue, incompatible avec $A\cap B$ telle que $(A\cap B)\cup E$ forment un évènement de probabilité connue, et utiliser la formule $P(A\cap B) = P((A\cap B)\cup E) - P(E)$.