Chapitre 1 (Rappel)

Dénombrement (Analyse combinatoire)

Analyse combinatoire

1. **Rappels de dénombrement :**

Proposition :

Soit E un ensemble fini.

1. Une permutation de E est une façon d'ordonner les éléments de E

Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est :

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-2) \times (n-1) \times n$

2. Un arrangement de k élément de E est une façon de choisir est d'ordonner k éléments de E : c'est une suite de k élément de E distincts 2 a 2
   Le nombre d'arrangement de k éléments parmi n éléments ($0 \le k \le n$) est :

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Une combinaison de k éléments de E est une façon de choisir k éléments de E , sans spécifier d'ordre : c'est un sous ensemble de E a k élément
   Le nombre de combinaison de k éléments parmi n éléments ou ($0 \le k \le n$) est
   $$C_n^k = \frac{n(n-1)...n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Remarques

1. On peut dire aussi qu'un arrangement correspond à un tirage de k éléments un par un (et sans remise) en mémorisant l'ordre de tirage, tandis qu'une combinaison correspond à un tirage de k éléments simultanément.
2. Un arrangement de n éléments parmi n est une permutation,

2. **Triangle de Pascal**

Le triangle arithmétique de Pascal est le triangle dont la ligne d'indice n (n = 0, 1, 2...) donne les coefficients binomiaux C_n^p pour p = 0, 1, 2..., n. Ces nombres apparaissent dans le développement de $(a + b)^n$ et dans nombreux domaines en mathématiques comme l'analyse combinatoire.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

3. **Méthode de construction du triangle de Pascal**

La construction de ce triangle de Pascal est simple, on part de 1 à la première ligne, par convention c'est la ligne zéro (n = 0). Pour avoir un terme de la ligne suivante, on prend le terme juste au-dessus, et on lui additionne celui qui est juste avant, (0 si il n'y a rien).

Mathématiquement, on applique la formule : $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$

4. Coefficients du développement de $(a + b)^n$.

Les nombres obtenus sont en fait les coefficients du développement de $(a + b)^n$. Par exemple :

- La ligne 0 est : **1** soit le coefficient de :$(a + b)^0 = 1$.
- La ligne 1 est : **1 - 1** soit les coefficients de : $(a + b)^1 = 1\times a + 1\times b$.

  Tout commence vraiment à la ligne n°2 (la 3ème en fait) :
- La ligne 2 est : **1 - 2 - 1** soit les coefficients de : $(a + b)^2 = 1\times a^2 + 2\times ab + 1\times b^2$.
- La ligne 3 est : **1 - 3 - 3 - 1** soit les coefficients de : $(a + b)^3 = 1\times a^3 + 3\times a^2b + 3\times ab^2 + 1\times b^3$.
- La ligne 4 est : **1 - 4 - 6 - 4 - 1** soit les coefficients de : $(a + b)^4 = 1\times a^4 + 4\times a^3b + 6\times a^2b^2 + 4\times ab^3 + 1\times b^4$.
- La ligne 5 est : **1 - 5 - 10 - 10 - 5 - 1** soit les coefficients de : $(a + b)^5 = 1\times a^5 + 5\times a^4b + 10\times a^3b^2 + 10\times a^2b^3 + 5\times ab^4 + 1\times b^5$.

Résume sur les méthodes de dénombrement

Types de tirages	Ordre	Répétition d'éléments	Dénombrement
Successifs avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p $p-listes$
Successifs sans remise	On tient compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p Arrangement
Simultanés sans remise	L'ordre n'intervient pas	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	C_n^p combinaisons
Simultanés avec remise	L'ordre n'intervient pas	Un élément peut être tiré plusieurs fois	C_{n+k-1}^k combinaisons avec répétition

5. Exemples d'application

5.1 Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Solution :

Notons E l'ensemble des trois entrés disponibles, E= $\{E_1, E2, E3\}$ ainsi card(E)=3
Notons P l'ensemble des deux plats disponibles, P= $\{P_1, P2\}$ ainsi card(P)=2
Notons D l'ensemble des quatre desserts disponibles, D= $\{D_1, D2, D3, D4\}$ ainsi card(D)=4
Un menu est constitué d'un triplet ordonné de trois éléments choisis respectivement dans E,P et D.
On effectue donc le produit cartésien de ces trois ensembles
Le nombre de menus que l'on peut composer est donc est égal à card(E)xcard(D)xcard(P) =3x2x4=24

5.2 Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Solution :

Cette femme peut s'habiller de 4x5x3=60 façons

5.3 A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr…) ?

Solution :

Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisi parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément alors

Il existe donc $A_{18}^{3}=\dfrac{18!}{(18-3)!}=4896\ \textit{podiums différents}$

5.4 De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

Solution :

Un choix de 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes est un élément du produit cartésien entre :

- L'ensemble des choix simultanés de 3 hommes parmi 10, de cardinal $C_{10}^{3}=120$
- L'ensemble des choix simultanés de 2 femmes parmi 5, de cardinal $C_{5}^{2}=10$
- L'ensemble des choix de 3 femmes et hommes parmi 10 femmes et 5 hommes vaut donc $C_{10}^{3}\times C_{5}^{2}=1200$

5.5 Quel est le coefficient de x^3y^7 dans le développement de $(x-y)^{10}$

Solution :

De façon générale on a $(x-y)^{10}=\sum_{k=0}^{k=10} C_{10}^{k}x^{k}(-y)^{10-k}$

Le terme de x^3y^7 est obtient pour k=3

Il apparait dans le binôme sous la forme $C_{10}^{3}x^{3}(-y)^{10-3}=-C_{10}^{3}x^{3}y^{7}$

Le coefficient de x^3y^7 est -120

5.6 On veut calculer $s=\sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_{n}^{k}\right)^{2}$

1. Justifier que : $s=\sum_{k=0}^{k=n}(n-k)\left(C_n^k\right)^2$
2. En déduire 2s puis calculer s

Solution :

1. Posons k = n-j, $s=\sum_{k=0}^{k=n}k\left(C_n^k\right)^2=\sum_{j=n}^{0}(n-j)\left(C_n^{n-j}\right)^2=\sum_{0}^{n}(n-j)\left(C_n^j\right)^2$

En repassant à la variable k on trouve $s=\sum_{0}^{n}(n-k)(C_n^k)^2$

$$2s=\sum_{k=0}^{k=n}k\left(C_n^k\right)^2+\sum_{0}^{n}(n-k)\left(C_n^k\right)^2=\sum_{0}^{n}k\left(C_n^k\right)^2+(n-k)\left(C_n^k\right)^2=\sum_{0}^{k}(k+(n-k))\left(C_n^k\right)^2$$
$$=n\sum_{0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$$

$$S=\frac{1}{2}nC_n^{2n}=\frac{1}{2}n\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{1}{2}n\frac{(2n-1)!2n}{n!n!}=n\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}=nC_n^{2n-1}$$