

Chapitre 3 :

Résolution du système d'équations algébriques

3.1- Introduction

Le résultat du processus de discrétisation c'est un système d'équations linéaires de la forme

$$A\phi = b \quad (1)$$

Φ sont les valeurs recherchées, situées au centre des éléments du maillage.

Dans ce système, les coefficients constituant la matrice A sont le résultat de la procédure du maillage et de linéarisation des équations, tandis que le vecteur b contient toutes les sources, les constantes, les conditions aux limites, et les composants non linéaires.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N-1} & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N-1} & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN-1} & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

Les techniques de résolution de systèmes linéaires d'équations sont généralement regroupés en des méthodes directes et itératives, avec de nombreux sous-groupes chaque catégorie.

Pour la méthode directe on a :

- élimination de Gauss,
- Factorisation LU

Pour les méthodes itératives

- Méthode de Jacobi,
- Méthode de Gauss-Siedel,
- Méthode de Factorisation LU incomplète.

Les problèmes d'écoulement étant fortement non linéaires, les coefficients résultant de leur processus de linéarisation dépendent généralement de la solution. Les méthodes directes ont été rarement utilisées dans les applications CFD. En revanche, les méthodes itératives sont plus populaires car ils sont plus adaptés à ce type d'applications.

3.2- Méthode direct- Méthode d'élimination de Gauss

La méthode directe la plus simple pour trouver des solutions au système d'équations est la technique d'élimination de Gauss. Qui consiste à une transformation du système en un système triangulaire supérieur équivalent.

La meilleure façon de décrire la technique d'élimination de Gauss est de commencer par un simple exemple. Soit un système d'équations linéaire avec les deux inconnues Φ_1 et Φ_2 :

$$a_{1,1}\phi_1 + a_{1,2}\phi_2 = b_1$$

$$a_{2,1}\phi_1 + a_{2,2}\phi_2 = b_2$$

Le système peut être résolu en éliminant l'une des variables de l'un des équations

$$\left(a_{22} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,2} \right) \phi_2 = b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} b_1 \quad (2)$$

L'équation obtenue n'implique qu'une seule inconnue, donc on a :

$$\phi_2 = \frac{b_2 + \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} b_1}{a_{11} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}}} \quad (3)$$

Connaissant ϕ_2 , sa valeur peut être remplacée dans l'équation pour trouver ϕ_1 .

$$\phi_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{b_2 + \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} b_1}{a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}}} \quad (4)$$

La même procédure peut être généralisée à un système d'équations N. La procédure commence par éliminer ϕ_1 de toutes les équations dans la 1 ère ligne de A. Pour éliminer ϕ_1 de la ième ligne ($i = 2, 3, \dots, N$), les coefficients de la première ligne sont multipliés par a_{i1}/a_{11} . L'équation résultante est soustraite à partir de la ième rangée. Le système d'équations à la fin de cette étape devient :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N-1} & a_{1N} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2N-1} & a'_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{N2} & \dots & a'_{NN-1} & a'_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_N \end{bmatrix}$$

ϕ_2 est éliminé de toutes les équations de la ligne 2 dans la matrice A modifié. Pour éliminer ϕ_2 de la ième ligne ($i = 3, 4, \dots, N$), les coefficients de la deuxième ligne sont multiplié par a_{i2}/a'_{22} et l'équation résultante est soustraite de la ième ligne. Et le processus se poursuit jusqu'à ce que ϕ_{N-1} soit éliminé de la Nème ligne conduisant à le système d'équations équivalent suivant avec sa matrice A transformée en un matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N-1} & a_{1N} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2N-1} & a'_{2N} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3N-1} & a''_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{N-1}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b^{N-1}_N \end{bmatrix}$$

3.2.1- Algorithme de Thomas TDMA

Nous appliquons la méthode de résolution dans le cas de l'équation de diffusion de la chaleur pour une géométrie monodirectionnelle cartésienne 1D , en régime permanent.



L'algorithme TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm)

L'équation discrétisé en 1 D : $a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i$ (5)

Et soit

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i$$

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1}$$

On remplace ces équations dans l'équation (5) de base et on obtient :

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + d_i$$

$$(a_i - c_i P_{i-1}) T_i = b_i T_{i+1} + c_i Q_{i-1} + d_i$$
(6)

$$T_i = \left(\frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \right) T_{i+1} + \left(\frac{c_i Q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \right)$$

On définit les coefficients générales:

$$P_i = \left(\frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \right)$$

$$Q_i = \left(\frac{c_i Q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \right)$$

On calcule les P_i et les Q_i jusqu'à $i = N$

Pour $i = N$ on aura : $P_N = 0$ ($b_N = 0$)

Et $Q_N = \left(\frac{c_N Q_{N-1} + d_N}{a_N - c_N P_{N-1}} \right)$ avec $T_N = Q_N$

Et on remonte pour calculer les T_i :

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad \text{pour } i = N-1 \dots \dots \dots 1.$$

3.3- Méthode itérative

3.3.1- Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi ou méthode de Liebmann, est la plus " évidente " des méthodes itératives. A partir de l'équation matricielle (1), qui est en fait la représentation condensée d'un système d'équations algébriques de forme générale :

$$\phi_p = \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p}$$

On procède par itérations successives, en commençant par une valeur "supposée" du résultat. Que nous noterons Φ_0 . Une itération consiste en un balayage complet du maillage. A partir des considérations physiques, il faut choisir une valeur initiale pas trop éloigné de la solution réelle, afin de réduire le nombre total d'itérations nécessaires. Lorsque les considérations physiques sont inexistantes on prend une valeur initiale nulle de la variable ($\Phi=0$).

3.3.2- Méthode de Gauss-Seidel

Cette méthode, aussi appelée méthode point par- point, se présente comme une variante de la précédente. De la même manière, on part d'une valeur "supposée" pour l'ensemble du champ d'extensive ϕ_0 , puis, sans garder deux vecteurs en mémoire, on calcule, en " balayant " le maillage tout entier, les valeurs de ϕ_1 par :

$$\phi_p = \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb}^* + b}{a_p}$$

avec $\Phi_{nb}^* = \Phi_{nb,1}$ est la dernière valeur connue

Comme pour la méthode de Jacobi, on répète les itérations jusqu'a convergence. La méthode de Gauss-Seidel sévère en général bien plus rapide que celle de Jacobi. En outre, elle demande moins de stockage-mémoire.

Cette méthode réunit à première vue toutes les qualités. Toutefois, elle reste encore souvent trop lente dans la convergence surtout quand le nombre des nœuds est important (la vitesse est de 01 nœud/itération). De plus sujette a divergence lorsque les non- linéarités sont trop fortes. C'est pourquoi on l'emploie peu sous sa forme initiale. La méthode de Gauss-Seidel est généralement utilisée en association avec des techniques de relaxation.

3.3.2.1- Exemples d'applications:

- Soit le système suivant :

$$\begin{cases} T_1 = 0.5T_2 + 3 \\ T_2 = 0.2T_1 + 3 \end{cases}$$

Le calcul itératif donne :

Itérations	Choix initial	1	2	3	4	N
T ₁	0	3	4.8	4.98	4.998		5
T ₂	0	1	3.96	3.996	3.9956		4

Le calcul itératif converge

- Soit le système suivant :

$$\begin{cases} T_1 = 5T_2 - 15 \\ T_2 = 2T_1 - 6 \end{cases}$$

Le calcul itératif donne :

Itérations	Choix initial	1	2	3	4	N
T ₁	0	-15	-195	-1995	...	diverge	
T ₂	0	-36	-396	-3996	diverge	

Le calcul itératif diverge à cause du non respect de la règle n° 04

La méthode de Gauss-Seidel ne converge pas si la condition de Scarborough n'est pas satisfaite (c'est condition nécessaire mais pas suffisante)

Le critère de Scarborough est défini comme suit :

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{a_p} \begin{cases} \leq 1 \rightarrow \text{pour...tout...les...equations} \\ < 1 \rightarrow \text{pour...au...moins...une...equation} \end{cases}$$

3.3.2.2- Notion de convergence

La notion de convergence d'un schéma itératif est intuitive et correspond mathématiquement à la propriété selon laquelle toute suite de Cauchy converge. De manière plus pratique, cela signifie que, si la différence entre les champs d'extensive ϕ_{i-1} et ϕ_i aux itérations $i-1$ et i est inférieure à une certaine limite, on peut considérer qu'ils sont égaux et qu'ils vérifient par conséquent l'équation matricielle.

La définition du critère de convergence adéquat représente un problème important. La première idée est de calculer une grandeur telle que $\max.P|\phi_i - \phi_{i-1}|$ et de poser que, pour que la convergence soit atteinte, cette grandeur doit être inférieure à un nombre suffisamment petit ε :

$$\max.P|\phi_i - \phi_{i-1}| \leq \varepsilon$$

L'utilisation d'un tel critère de convergence possède un grave inconvénient : si, en un point, la convergence est lente, alors qu'elle est très rapide pour presque tout le domaine, le calcul itératif général continuera à s'effectuer alors même qu'on pourrait souhaiter s'arrêter. Ce cas est extrêmement courant. L'utilisation de critères tels que :

$$\sum_P |\phi_i - \phi_{i-1}| \leq \varepsilon$$

$$\sum_P V_P |\phi_i - \phi_{i-1}| \leq \varepsilon$$

Où V_P est le volume de contrôle associé au nœud P

Une technique alternative, elle consiste à calculer, pour chaque point et chaque itération le résidu de l'équation $R_{p,i}$:

$$R_{p,i} = \left| \phi_{p,i} - \left(\sum \frac{a_{nb}}{a_p} \phi_{nb} + \frac{b}{a_p} \right) \right|$$

Le vecteur $R_{p,i}$ représente en fait "l'écart à l'exactitude de ϕ ou le résidu des calcul pour avoir une idée précise sur la convergence des calcul, il faut contrôler la valeur normalisée du résidu qui est R/F ou F représente le flux total.

3.3.2.3- Facteur de relaxation

La technique consiste simplement, à chaque itératif i , à remplacer la valeur qu'on vient de calculer $\Phi_{p,i}$ par une quantité : $\phi_{p,i}^* = \alpha \phi_{p,i} + (1 - \alpha) \phi_{p,i-1}$

Et d'utiliser $\Phi_{p,i}^*$ à la place de $\Phi_{p,i}$ à partir de cette itération (méthode de Jacobi) ou immédiatement à partir de ce calcul (méthode de Gauss-Seidel). Dans l'équation, α est le facteur de relaxation. Plusieurs commentaires peuvent être formulés à ce stade :

- $\alpha = 1$ correspond à une relaxation sans effet.
- $\alpha = 0$ signifie que le processus itératif est stoppé.
- $0 < \alpha < 1$ correspond à la notion de sous-relaxation.

Le processus itératif est freiné afin de limiter les risques de divergence. Des valeurs aussi faibles tel que $\alpha = 0,01$ doivent parfois être utilisées dans le cas d'équations non-linéaires fortement couplées (turbulence, par exemple).

- $1 < \alpha < 2$ correspond à la notion de sur-relaxation.

Le schéma itératif est cette fois "accélééré" afin d'obtenir une convergence plus rapide. Très efficace dans le cas d'équations linéaires ou presque linéaires, la sur-relaxation ne doit être employée qu'avec précaution du fait du risque de divergence du processus.

- Par ailleurs, une valeur de α supérieure à 2 conduit à la divergence des calculs.

Il n'existe pas de règle absolue permettant de choisir un facteur de relaxation optimal. L'utilisation d'un facteur de relaxation couplée à la méthode itérative de Gauss-Seidel est probablement une des plus courantes des techniques de résolution numérique des équations convection-diffusion discrétisées par la méthode des volumes finis.