Chapitre2 :

Discrétisation du terme diffusion

2.1- Introduction

La discrétisation c'est le passage d'une information continue vers une information discrète. Les équations discrétisé sont la transformation des équations aux dérivées partielles en équations algébriques. La discrétisation du domaine d'étude précède la discrétisation des équations.

L'approche consiste à diviser le domaine de calcul en plusieurs petits volumes qui ne se chevauchent pas et dont la somme fait exactement le volume du domaine de calcul à étudier. C'est très important pour assurer le principe de conservation. Ensuite vient le principe de base de la méthode qui n'est autre que le théorème de la divergence (Ostrogradski) qui consiste à changer une intégrale de volume en intégrale de surface. L'application de ce théorème tout en utilisant des schémas de différences finies pour le dérivées partielles, donne naissance à des équations algébriques.

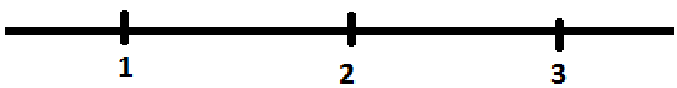
2.2- Méthode de développement de Taylor

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I. On suppose que f admet des dérivées jusqu'`a l'ordre n + 1 sur I. alors pour tout h tel que a + h soit dans I, il existe c entre a et a + h tel que :

$$f(a+h) = f(a) + f^{'}(a)h + \frac{f^{''}(a)}{2!}h^2 + \ldots \frac{f^{n}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{1}$$

Le terme f(a) + f' (a) h s'appelle l'approximation d'ordre 1 de la fonction f au point a et c'est un polynôme de degré 1 en h. La formule de Taylor généralise cette formule et donne l'approximation d'ordre n de f au point a

Le développement de Taylor autour du point 2 donne :



$$\phi_1 = \phi_2 - \Delta x\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_2 + \frac{1}{2}\Delta x^2\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \vartheta(x) \tag{2}$$

$$\phi_3 = \phi_2 - \Delta x\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_2 + \frac{1}{2}\Delta x^2\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \vartheta(x) \tag{3}$$

Avec :

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_2 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\Delta x}$$ Différence régressive

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_2 = \frac{\phi_3 - \phi_2}{\Delta x}$$ Différence progressive

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_2 = \frac{\phi_3 - \phi_1}{2\Delta x}$$ Différence centrée

2.3- Equation a discrétisé

Le but est de résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + div(\rho U\phi) = div(\Gamma grad\phi) + S \tag{5}$$

Pour simplifier le problème, considérons le cas d'un problème stationnaire (régime permanent) $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \longrightarrow div(\rho u) = 0$ (l'équation de continuité)

La résolution du problème revient à resoudre l'équation avec seulement le terme source

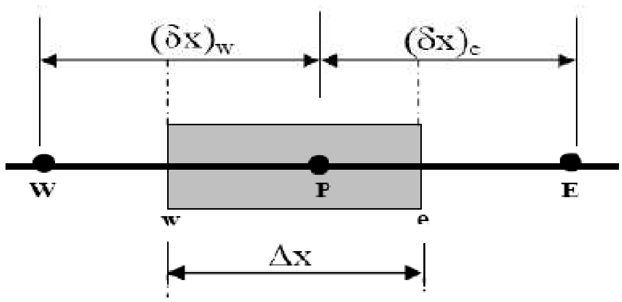
div(Ѓ gradΦ) +S=0

ou encore

$$\nabla.(\Gamma\nabla\phi) + S = 0 \tag{6}$$

2.4- Formulation par les volumes de contrôle

L'équation est discrétisée pour un volume de contrôle interne. Ce volume de contrôle est construit autour du point P (Figure 1). Nous appelons 'East' le premier voisin du point P dans la direction des x croissants et 'West' le premier voisin dans la direction des x décroissante, les deux traits verticaux en pointille délimitent le volume de contrôle associe a P. Les frontières du volume de contrôle sont représentées par les lettres minuscules e et w.

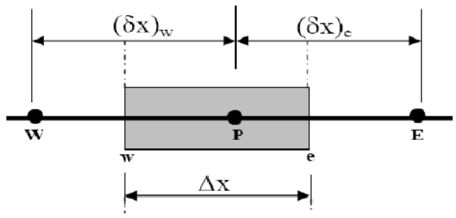


2.5- Exemple - Problème de conduction unidimensionnel

Nous appliquons maintenant la méthode des volumes finis dans le cas de l'équation de diffusion de la chaleur pour une géométrie monodirectionnelle cartésienne, en régime permanent. Dans le cadre de ces hypothèses, l'équation de la chaleur prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + S = 0 \tag{7}$$

K est la conductivité thermique, T la température et S terme source représentant la création ou l'absorption d'énergie par unité de volume.
Pour un volume de contrôle interne, l'équation est discrétisée



Le point P a deux voisins W et E
L'intégrale de l'équation dans le volume de contrôle entre w et e :

$$\int_w^e \left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S\right]dx=0$$

$$\left(k\frac{dT}{dx}\right)_e-\left(k\frac{dT}{dx}\right)_w+\int_w^e Sdx=0 \tag{8}$$

On suppose que le coefficient de conductivité k est constant $k_e=k_w=k$

$$\left(k\frac{T_E-T_P}{\delta x_e}\right)_e-\left(k\frac{T_P-T_W}{\delta x_W}\right)+\bar{S}\Delta x=0 \tag{10}$$

Apres arrangement :

$$a_pT_p=a_ET_E+a_WT_W+b \tag{11}$$

$$a_p=a_E+a_W$$

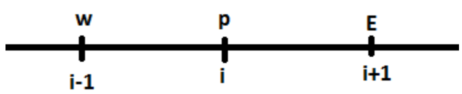
$$a_E=\frac{k}{\delta x_e}$$

$$a_W=\frac{k}{\delta x_w}$$

$$b=\bar{S}\Delta x$$

L'équation (11) est l'équation discrétisé de l'équation differentielle (7) C'est de la forme :

$$a_pT_p=\sum a_{nb}T_{nb}+b \tag{12}$$



On peut généraliser ce résultat pour plusieurs nœuds (i)

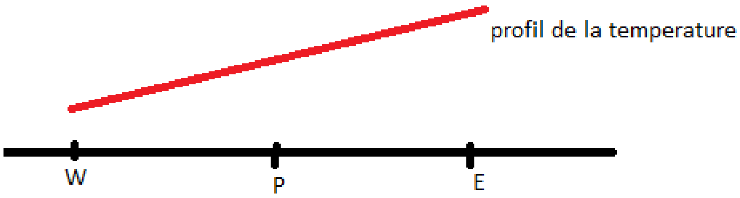
$$a_iT_i=b_iT_{i+1}+c_iT_{i-1}+d_i$$

Le nombre d'équations est égal aux nombres de nœuds (i) .
Arrangement du terme source

Il y a quatre règles de base qu'il faut respecter pour les équations :

Règle 01 :

La consistance aux interfaces des volumes de contrôle : Le flux à travers les sous domaines doit être conservé que le profil de la variation de la température est supposé linéaire



Regle 02 : tout les coefficients de l'equation (11) doivent etre positifs

Regle 03 : linealisation du terme source (dans le cas ou le terme source depend de la temperature).

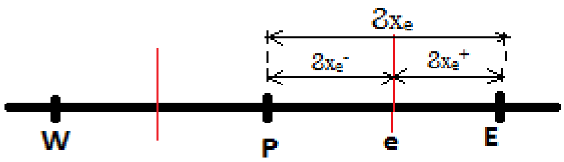
Soit : $\overline{S} = S_C + S_P T_P$

Donc l'equation (11) devient : $A_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + S_C \Delta x$ avec $A_p = a_E + a_W - S_P \Delta x$

Regle 04 : dans un probleme de conduction sans terme source l'equation (11) s'ecrit

$a_p T_p = \sum a_{nb} T_{nb}$ Avec $a_p = \sum a_{nb}$

2.5.1- Evaluation du flux a l'interface



Le flux a travers la interface(e) est donné par la loi de fourrier : $\varphi_e = k \dfrac{T_p - T_e}{\delta x_e^-}$

D'après l'équation (11) et en supposant que le terme source S est nul, on a

$$a_e T_e = a_p T_p + a_E T_E$$

T_e est la température de l'interface (e)
D'où :

$$T_e = \frac{a_p}{a_e} T_p + \frac{a_E}{a_e} T_E$$

Avec

$$a_e = a_p + a_E \qquad a_E = \frac{k}{\delta x_e^{+}} \qquad a_p = \frac{k}{\delta x_e^{-}}$$

Le flux de chaleur :

$$\varphi_e = k\frac{T_p - T_e}{\delta x_e^{-}}$$

On remplace T_e par son expression et on obtient :

$$\varphi_e = \frac{k}{\delta x_e^{-}}\left(T_P - \frac{a_p}{a_e}T_P - \frac{a_E}{a_e}T_E\right)$$

$$\varphi_e = \frac{k}{\delta x_e^{-}}\left(T_P\left(\frac{a_E}{a_p + a_E}\right) - \frac{a_E}{a_p + a_E}T_E\right)$$

$$\varphi_e = \frac{k}{\delta x_e^{-}}\left(\frac{a_E}{a_p + a_E}\right)(T_P - T_E)$$

$$\varphi_e = \frac{1}{\left(\frac{K}{\delta x_e^{-}}\right)^{-1}}\frac{T_P - T_E}{\frac{a_p + a_E}{a_E}}$$

$$\varphi_e = \frac{1}{\frac{\delta x_e^{-}}{k}}\frac{T_P - T_E}{\left(1 + \frac{\delta x^{+}}{\delta x^{-}}\right)}$$

$$\varphi_e = k\frac{T_P - T_E}{\left(\delta x^{-} + \delta x^{+}\right)}$$

$$\varphi_e = k\frac{T_P - T_E}{\delta x_e}$$

2.6- Conditions aux limites

Pour un problème défini dans un domaine limité par des frontières, il existe 03 types de condition limites :

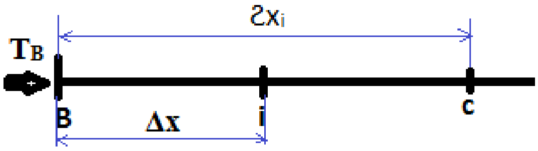
Type de Dirichlet : par exemple la température imposée à la paroi.

Type Newman : Flux de chaleur imposé à la paroi (φ connu)

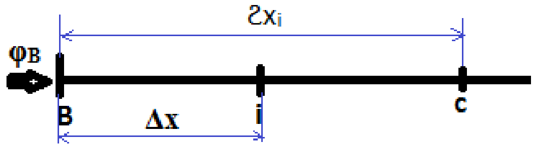
Type fourrier : Flux de chaleur imposé à la paroi par un coefficient d'échange h et température ambiante T_e.

- Cas température imposée :

L'équation discrétisé pour le nœud B n'est pas nécessaire



- Cas du flux imposé à la paroi



L'équation de base : $\dfrac{d}{dx}\left(k\dfrac{dT}{dx}\right)+S=0$

$$\left(k\frac{dT}{dx}\right)_i-\left(k\frac{dT}{dx}\right)_B+\int_i^B S dx=0$$

$$\left(k\frac{T_C-T_B}{\delta x_i}\right)-\varphi_B+\bar{S}\,\Delta x=0$$

$$\left(k\frac{T_C-T_B}{\delta x_i}\right)-\varphi_B+(S_C+S_P T_B)\Delta x=0$$

$$\left(\frac{K}{\delta x_i}-S_P\Delta x\right)T_B=\frac{k}{\delta x_i}T_C+(S_C\Delta x+\varphi_B)$$

C'est de la forme :

$$a_B T_B=a_C T_C+b \qquad a_B=\left(\frac{K}{\delta x_i}-S_P\Delta x\right) \quad a_C=\frac{k}{\delta x_i} \quad b=(S_C\Delta x+\varphi_B)$$

- Flux de chaleur imposé à la paroi par un coefficient d'échange h et température ambiante T_e. $\varphi_B=h(T_e-T_B)$

Si $T_B < T_e$ le flux est négatif
Si $T_B > T_e$ le flux est positif
L'équation

$$\left(k\frac{T_I-T_B}{\delta x_i}\right)-h(T_f-T_B)+(S_C+S_P T_B)\Delta x=0$$

$$\left(\frac{K}{\delta x_i}-S_P\Delta x+h\right)T_B=\frac{k}{\delta x_i}T_I+(S_C\Delta x+hT_f)$$

C'est de la forme :

$$a_B T_B=a_I T_I+b$$

avec

$$a_B=\left(\frac{K}{\delta x_i}-S_P\Delta x-h\right) \quad a_I=\frac{k}{\delta x_i} \quad b=S_C\Delta x+hT_B$$

Série 01 : Discrétisation du terme diffusion

Exercice 1

Dans un problème de conduction avec une symétrie axiale, la conductivité unidimensionnelle en régime permanent est régi par l'équation :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right)+S=0$$

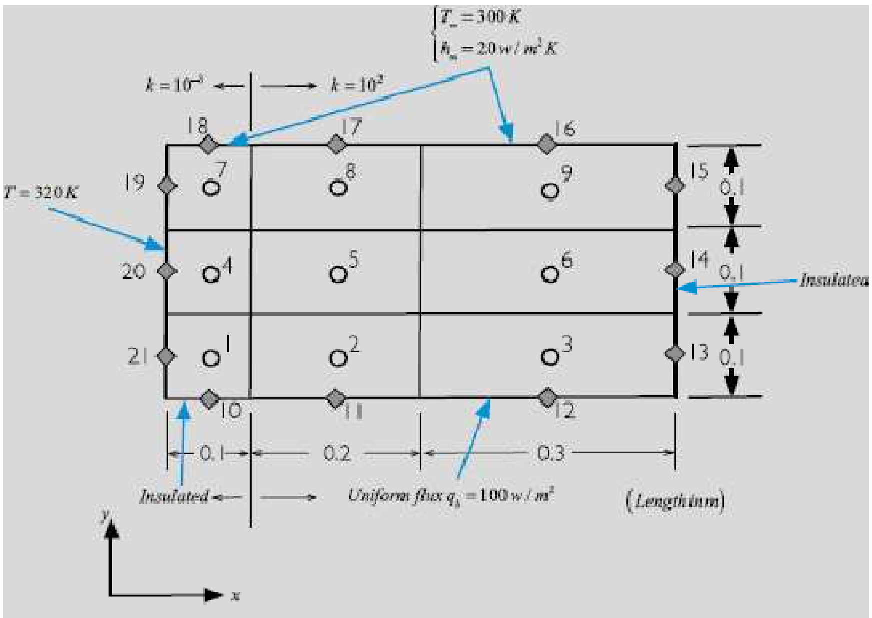
Ou r est la coordonnée radiale ; en utilisant la méthode des volumes de contrôle, trouver l'équation discrétisée.

Exercice 2

Le phénomène de la conduction thermique dans le domaine rectangulaire bidimensionnel composé de deux matériaux représentés sur la Figure est régi par l'équation différentielle suivant:

$$\nabla.(k\nabla T)=0$$

Où T représente la température. Pour les conductivités thermiques (k) et les conditions aux limites sont affichées sur la figure:



1- Déterminez les équations algébriques pour toutes les mailles représentées sur la figure.
2- En utilisant la méthode itérative de Gauss-Seidel, résoudre le système d'équations obtenu et calculer les valeurs de T des maille.
3- Calculez les valeurs de T aux limites inférieure, droite et supérieure.
4- Calculer le flux de chaleur aux limites, le haut, le bas et la gauche