

Chapitre 1 : Généralité sur la dynamique des fluides CFD

1- introduction

La mécanique des fluides numériques ou computational fluid dynamics (CFD), consiste à étudier les mouvements d'un fluide par la résolution numérique des équations régissant le fluide. En fonction d'une modélisation par des méthodes numériques, les équations résolues peuvent être les équations d'Euler, les équations de Navier-Stokes, etc.

Le CFD est un outil essentiel dans pratiquement toutes les branches de la dynamique des fluides dans plusieurs domaines. Cette approche permet l'accès à toutes les informations instantanées (vitesse, pression, concentration, température) pour chaque point du domaine de calcul, pour un coût global généralement très faible par rapport aux expériences correspondantes.

2- Processus de discrétisation

Les différentes étapes du processus de discrétisation sont illustrées sur la figure suivante :

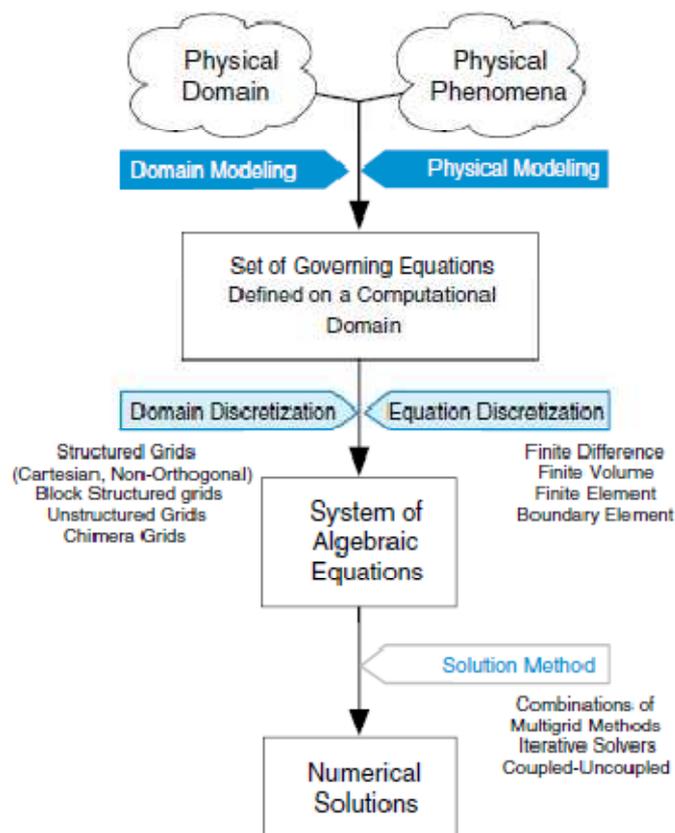


Figure 1. Processus de discrétisation

La solution numérique d'une équation aux dérivées partielles consiste à trouver la valeur de la variable ϕ (vitesse, pression, concentration) à des points spécifiés construit sur le domaine d'étude.

Ces points sont appelés éléments de maillage ou nœuds de maille résultant de la discrétisation de la géométrie d'origine en un ensemble d'éléments discrets non superposés, selon un processus connu sous le nom de maillage.

Les variables calculées sont généralement positionnés au centre des cellules ou aux nœuds en fonction de la méthode de discrétisation adoptée.

Une fois la distribution de la variable ϕ est discrétisée, et il convient de se référer à ce processus de conversion de l'équation gouvernante en un ensemble équations d'algébriques pour les valeurs discrètes de ϕ .

Dans les méthodes de discrétisation, on remplace la solution exacte continue de l'équation aux dérivées partielle par valeurs discrètes.

Les valeurs discrètes de ϕ sont généralement calculées en résolvant un ensemble d'équations algébriques relier les valeurs des éléments de maille voisins les uns aux autres.

Une fois que les valeurs de ϕ sont calculées, les données sont traitées pour extraire toutes les informations nécessaires

3- étapes de discrétisation

3.1- Etape 1- discrétisation du domaine

La discrétisation géométrique du domaine physique se traduit par un maillage sur lequel les équations de conservation sont finalement résolues. Cela nécessite la subdivision du domaine en cellules ou éléments discrets qui ne se chevauchent pas et qui couvre complètement le domaine de calcul.

Ceci est accompli par une variété de techniques aboutissant à un large éventail de types de maillage. Ce maillage est classé selon la topologie : structuré, non structuré ou hybride.

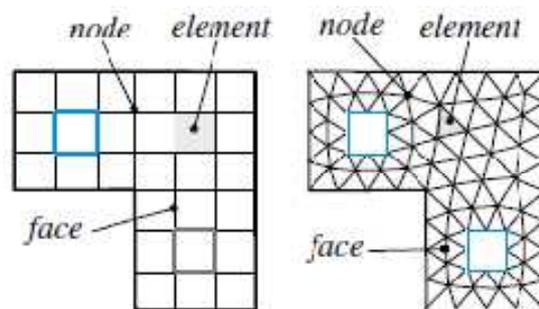


Figure2 : type de maillage

Le maillage est composé d'éléments définis par un ensemble de sommets ou nœuds et délimités par des faces. Les détails sur le maillage peuvent être déduits des indices d'éléments pour localiser spatialement et temporellement tous les points de la solution numérique. C'est ce qu'on va appeler création de la grille de calcul. Une Grille de calcul La (Figure 3) représente la manière la plus directe pour repérer les points suivant la procédure structurée. C'est un peu comme une matrice, chaque point sera affecté d'indexés qui le positionneront par rapport à ces voisins.

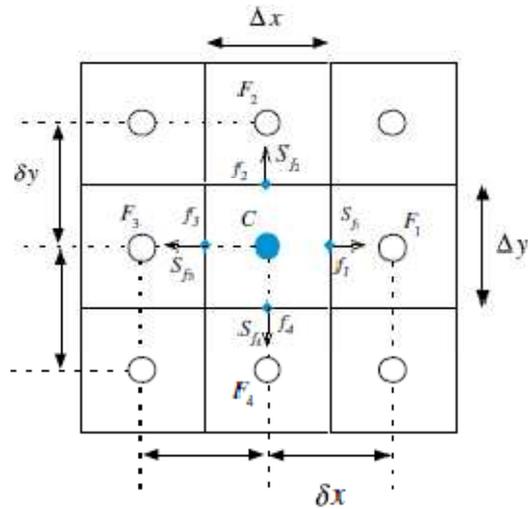


Figure 3: grille de calcul

3.2- Discrétisation des équations

3.2.1- forme des équations différentielles

Considérons la forme générale d'une Equation aux Dérivées Partielles (EDP) de second ordre suivant les deux variables indépendantes (x et y) :

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0 \quad (1)$$

Une classification assez simple de cette équation peut être faite sur la base des coefficients associés aux dérivées d'ordre le plus élevé A, B et C. On calcule le déterminant défini par :

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

L'équation est dite de type

- **elliptique** si $\Delta < 0$,
- **parabolique** si $\Delta = 0$,
- **hyperbolique** si $\Delta > 0$.

Par exemple :

L'équation de Laplace	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$	elliptique
L'équation de diffusion	$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$	parabolique
L'équation	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$	hyperbolique

3.2.2- Etape 2 : processus de discrétisation

À l'étape 1 du processus de discrétisation en volume fini, les équations gouvernantes sont intégrés sur les éléments (ou volumes finis), le théorème de Gauss est appliqué pour transformer les intégrales de volume de les termes de convection et de diffusion en intégrales de surface.

Après cette étape, les intégrales de surface et de volume sont transformées en intégrales discrètes et intégrées numériquement grâce à l'utilisation de points d'intégration.

L'équation de conservation pour une variable scalaire générale peut être exprimée comme

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S$$

La forme stationnaire de l'équation ci-dessus est obtenue en négligeant le terme transitoire

$$\nabla \cdot (\rho u \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S$$

En intégrant l'équation ci-dessus sur l'élément C représenté sur la figure

$$\int_{V_c} \nabla \cdot (\rho u \phi) dv = \int_{V_c} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dv + \int_{V_c} S dv$$

On remplace les intégrales de volume des termes de la convection et de la diffusion par les intégrales de surface par l'utilisation du théorème de divergence, l'équation ci-dessus devient :

$$\oint_{\partial V_c} (\rho u \phi) ds = \oint_{\partial V_c} (\Gamma \nabla \phi) ds + \int_{V_c} S dv$$

Pour la résolution des équations on a besoin des conditions limites. Ces conditions limites peuvent être de trois natures :

Dirichlet : Dans ce type de conditions la valeur de la variable dépendante est imposée sur la frontière du domaine de calcul

$$\Phi = f$$

Newman : La variable dépendante n'est pas connue sur la frontière mais sa dérivée est bien définie

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f$$

Mixte : Une combinaison linéaire des deux premières conditions est imposée sur la frontière

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + k\phi = f$$

3.2.3- Etape 3- Les équations algébriques

Les équations différentielles régissant sont transformées en un ensemble d'équations algébriques, une pour chaque élément du domaine de calcul. Les équations algébriques sont ensuite assemblées en une matrice globale et des vecteurs qui peuvent être exprimés sous la forme :

$$A[T] = b$$

Où la variable inconnue T est définie à chaque élément intérieur et à la frontière du domaine de calcul. Les valeurs limites pour T sont généralement obtenues à partir des conditions aux limites spécifiées.

Au fur et à mesure que le nombre d'éléments de grille augmente, la solution des équations discrétisées devrait approcher la solution exacte de l'équation différentielle correspondante.

Du fait que, à mesure que les éléments de la grille se rapprochent, les changements de T entre les éléments de grille voisins deviennent petits.

3.2.4- Etape 4- Solution des équations discrétisées

La discrétisation de l'équation différentielle se traduit par un ensemble d'équations d'algébriques discrètes, qui doivent être résolues pour obtenir les valeurs discrètes de T. Les coefficients de ces équations peuvent être indépendantes de T (c.-à-d. linéaires) ou dépendantes de T (c.-à-d. non linéaire).

Les techniques pour résoudre ce système algébrique d'équations sont indépendantes de la méthode de discrétisation. Différentes méthodes de résolution peuvent être utilisées pour obtenir une solution.

- Méthodes directes

Dans la méthode directe, la solution du système d'équations est obtenue en appliquant un algorithme relativement complexe, par rapport à une méthode itérative. La méthode directe consiste à l'inversion de matrice pour laquelle la solution est obtenue.

$$[T] = A^{-1}b$$

En général, les méthodes directes sont rarement utilisées en CFD à cause de leurs grandes exigences de calcul et de stockage. Les problèmes actuels en CFD concernent des centaines de milliers de cellules, avec 5 à 10 inconnues par cellule.

Par conséquent, la matrice A est généralement très grande et la méthode directe devient impraticable pour ces problèmes. En outre, la matrice A est généralement non linéaire, de sorte que la méthode directe doit être intégrée dans une boucle itérative pour libéraliser la matrice A.

- Méthodes itératives

Les méthodes itératives suivent une procédure de supposition et de correction pour affiner la solution estimée en résolvant à plusieurs reprises le système d'équations. La méthode itérative de Gauss-Seidel est souvent utilisée.