Chapitre 5 : Torsion

Dr. BOUARICHA Leyla

Université Djilali Bounaama de Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Technologie

émail : l.bouaricha@univ-dbkm.dz

Juin 2022

2.0

Table des matières

Définition

La torsion (dite aussi torsion pure) est un mode de sollicitation de sorte que dans toute section droite d'un corps (ou d'une pièce) il n'existe qu'un moment de torsion Mt.

Une barre soumise principalement à la torsion porte le nom d'arbre (Fig. 5.1).

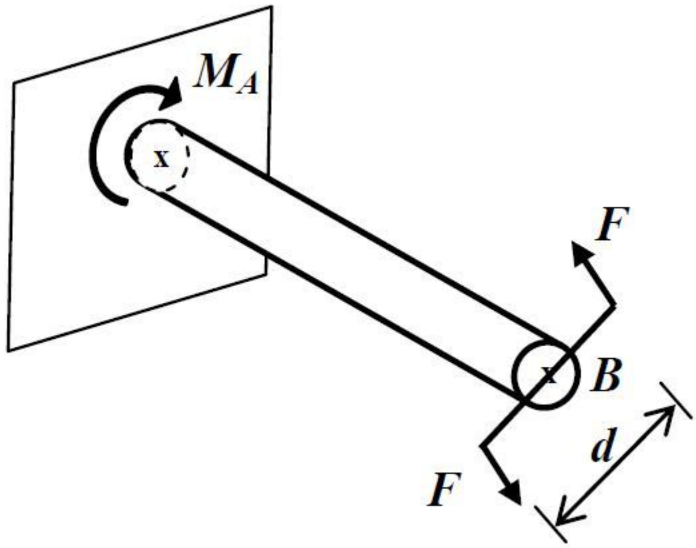


Fig. 5.1- Exemple d'une barre soumise à la torsion.

La condition d'équilibre de la barre ci-dessus est:

$$M_A = M_B = F.d \tag{5.1}$$

De ce fait, toute section droite de la barre n'est sollicitée que par un moment de torsion $M_t = M_A$ et on dit que cette barre est en état de torsion pure.

Moment de torsion

1. Convention de signe

Par convention, le moment de torsion (effort interne) est:

- positif (M_t >0) s'il agit dans le sens antihoraire pour un observateur qui regarde la section.
- négatif (M_t <0) s'il agit dans le sens horaire pour un observateur qui regarde la section.

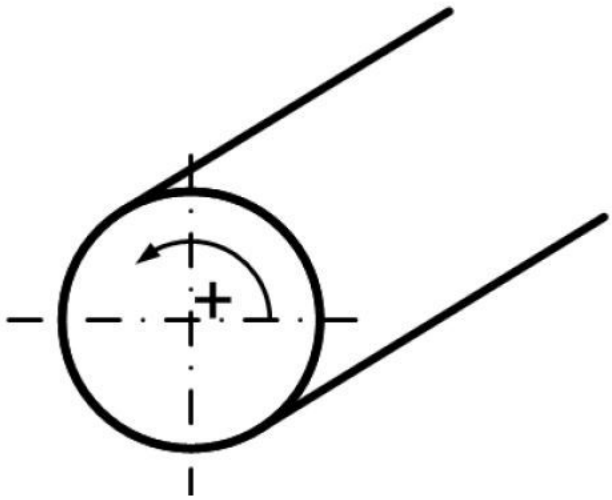


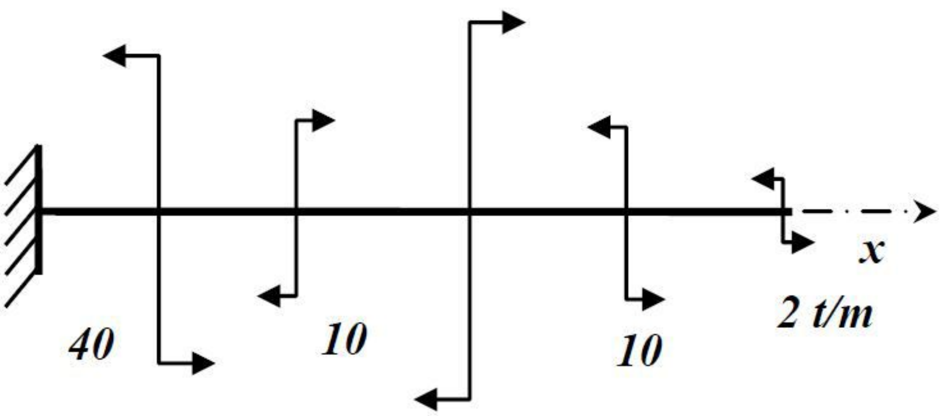
Fig. 5.2- Convention de signe.

2. Diagramme du moment de torsion

Le moment de torsion agissant en un point d'une barre est égal à la somme algébrique des moments des couples extérieurs appliqués d'un côté ou de l'autre de la partie considérée (la partie considérée est laissée au choix)

Exemple

Tracer le diagramme du moment de torsion pour la barre montrée par la figure suivante.



Contraintes de cisaillement et angle de torsion

1. Hypothèses

Les problèmes de torsion peuvent être résolus en utilisant les méthodes de la résistance des matériaux en adoptant les hypothèses :

1- La section droite plane et perpendiculaire à l'axe de la pièce (ou d'un élément) avant sollicitation reste droite plane et perpendiculaire à l'axe après sollicitation. Cette hypothèse peut être vérifiée expérimentalement pour les corps à sections circulaires et est incorrecte pour les sections non circulaires.

2- Le diamètre de la section avant sollicitation reste droit après déformation suite à l'application du moment de torsion.

2. Angle de torsion

Considérons une barre de section circulaire soumise à un moment de torsion constant. Coupons un élément de longueur (dx)

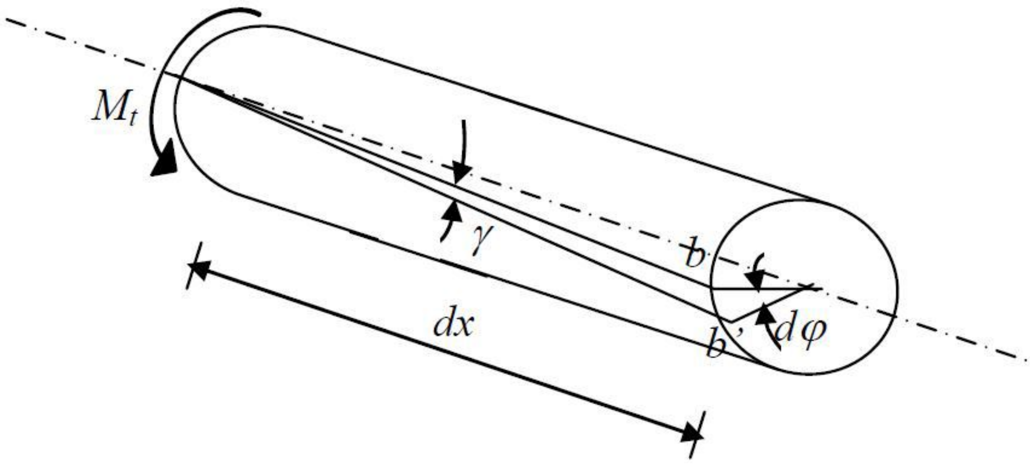


Fig. 5.3- Elément d'une barre soumise à la torsion.

$$bb' = r\,d\varphi = \gamma\,dx \rightarrow \gamma = r\frac{d\varphi}{dx}$$

γ est appelé déformation (ou angle) de cisaillement.

dφ/dx est l'angle de torsion par unité de longueur qui est constante et on la note par θ de sorte :

$$\gamma = r.\theta \qquad (5.2)$$

3. Contraintes de cisaillement

La loi de Hooke pour le cisaillement est :

$$\tau = \gamma . G \qquad (5.3)$$

G est appelé module de cisaillement ou module d'élasticité transversale, dépend du matériau et est exprimée en MPA.

En remplaçant la déformation de cisaillement par son expression, on obtient :

$$\tau = r . G . \theta \qquad (5.4)$$

Pour calculer les contraintes de cisaillement dans la barre on utilise, au lieu du rayon r, la coordonnée polaire ρ au point considéré :

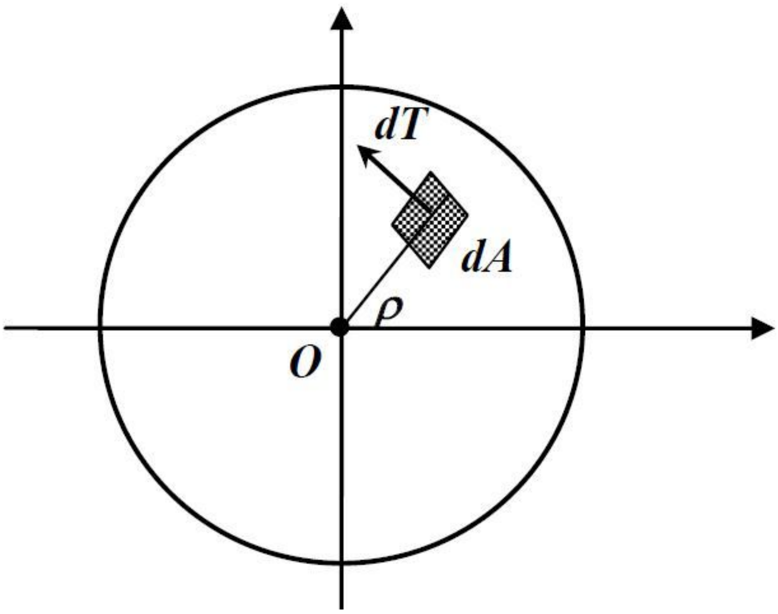


Fig. 5.4- Force de cisaillement en un point d'une section.

La force élémentaire agissant sur la surface dA est :

dT=τ.dA

Cette force fait naitre un moment de torsion élémentaire dM_t :

dM_t = ρ .dA

Ainsi, le moment de torsion est:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A \rho . \tau . dA \\ &= G . \theta \int_A \rho^2 dA \end{aligned} \qquad (5.5)$$

La quantité ρ^2 .dA est appelée le moment d'inertie polaire (I_P). d'où

$$\begin{aligned} M_t &= G . \theta . I_P \\ \Rightarrow \theta &= \frac{M_t}{G . I_P} \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Des relations (5.2), (5.3) et (5.6), on tire:

$$\tau = \frac{M_t}{I_P}\rho \tag{5.7}$$

La contrainte de cisaillement maximale est :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_P} r = \frac{M_t}{W_P} \tag{5.8}$$

Avec $W_P = I_P/r$ est le module de résistance polaire de la section.

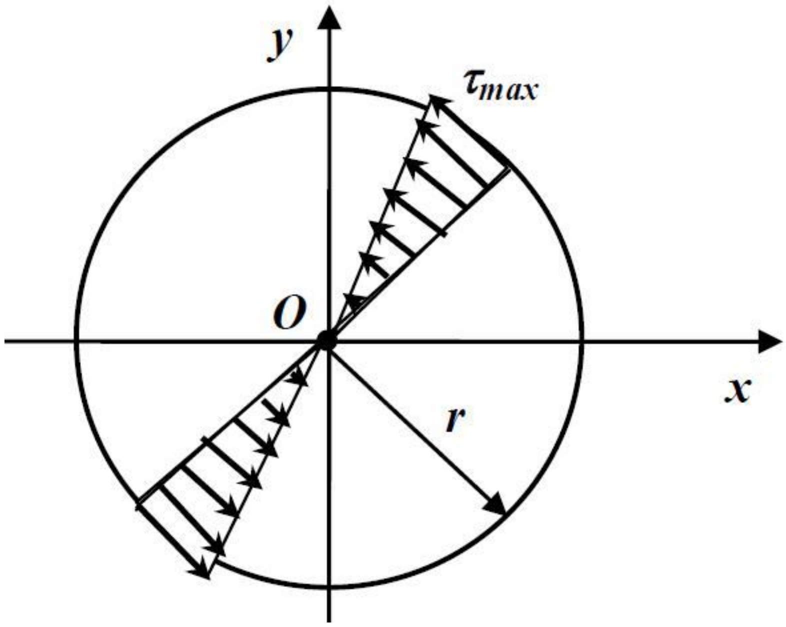
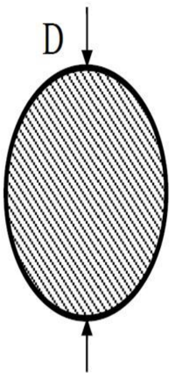


Fig. 5.5- Distribution des contraintes de cisaillement dans une section soumise à la torsion.

Exemple

• Exemples de Calcul des modules de résistance polaires

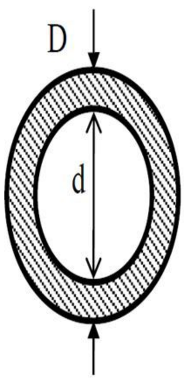


Section circulaire pleine:

$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$r = \frac{D}{2}$$

$$W_P = \frac{\pi D^3}{16}$$



Section circulaire tubulaire:

$$I_P = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32}$$

$$r = \frac{D}{2}$$

$$W_P = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{16D}$$

Dimensionnement à la torsion

IV

1. Condition de résistance

Pour qu'un corps sollicité en torsion pure résiste en toute sécurité, il faut que les contraintes de cisaillement maximales τ_{max} engendrées par un moment de torsion donné dans une section soient inférieures ou égales à la contrainte de cisaillement admissible [τ] du matériau constituant le corps. C-à-d

$$\tau_{max} \leq [\tau] \tag{5.9}$$

2. Condition de rigidité

L'angle de torsion relatif est donné par l'expression :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G.I_P}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \int_0^L \frac{M_t}{G.I_P} dx \tag{5.10}$$

Pour une portion de la barre de longueur L et de section constante (I_P =Cste), sollicitée par un moment de torsion constant (M_t = Cste), l'angle de torsion devient:

$$\varphi = \frac{M_t}{G.I_P} \int_0^L dx$$

$$= \frac{M_t.L}{G.I_P} \tag{5.11}$$

Et pour toute la barre, on a:

$$\varphi = \sum_i \frac{M_{ti}.L_i}{G.I_{P_i}} \tag{5.12}$$

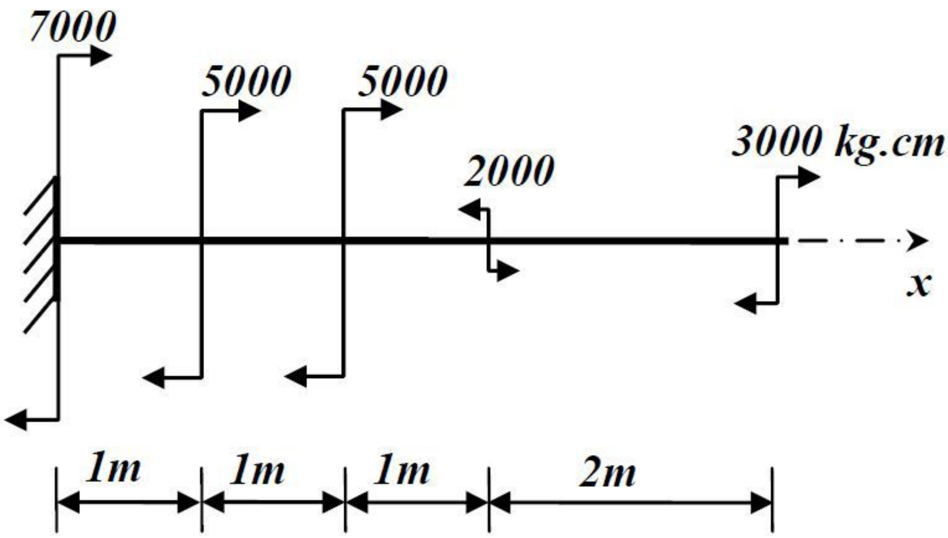
La condition de rigidité est que l'angle de torsion soit inférieur ou égal à la valeur admissible, c-à-d:

$$\varphi \leq [\varphi] \tag{5.13}$$

Généralement, [ϕ] = 0,3°/m

Exemple

Calculer le diamètre de l'arbre ci-dessous puis vérifier sa rigidité.



Torsion d'une barre à section transversale non circulaire

V

La torsion des barres à sections transversales non circulaires ne peuvent s'étudier au moyen des méthodes de la résistance des matériaux. A cet effet, on donne ici (sans démonstration) quelques résultats obtenus de la théorie de l'élasticité.

Les contraintes de cisaillement maximales dans une section sont données par:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \qquad (5.14)$$

W_t est appelé module de résistance à la torsion et il est différent du module de résistance polaire W_P sauf pour les sections circulaires et s'exprime par la relation:

$$W_t = \alpha.h.b^2 \qquad (5.15)$$

Tels que h et b sont les dimensions de la section avec h > b.

L'angle de torsion se calcule dans ce cas par l'expression :

$$\varphi = \frac{M_t.L}{G.I_t} \qquad (5.16)$$

Où I_t est donné par : $I_t = \eta.h.b^3$

Les coefficients α et η sont donnés en fonction du rapport h/b dans le tableau 5.1.

h/b	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10,0	∞
α	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,313	0,333
η	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,313	0,333

Tableau 5.1- Valeurs des coefficients α et η en fonction du rapport h/b.

Exemple

Calculer les dimensions de la section de la barre ci-dessous sollicitée en torsion sachant que h/b = 2 et [τ]= 500 kg/cm^2.