*Nom et Prénom : *Groupe :

Université Djilali BOUNAÂMA-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Niveau : $1^{ière}$ année LMD
Année : 2022-2023
Matière : Algèbre 2

Examen de rattrapage
Questionnaire à choix multiple

Remarque : La bonne réponse : +1, la mauvaise réponse : -1.

Question 1
Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x + y = 1\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est un espace vectoriel, car E est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
- ☒ E n'est pas un espace vectoriel, car $(0, 0) \notin E$.
- ☒ E n'est pas un espace vectoriel, car $(1, 0) \in E$, mais $(-1, 0) \notin E$.
- ☒ E n'est pas un espace vectoriel, car $(1, 0) \in E$ et $(0, 1) \in E$, mais $(1, 1) \notin E$.

Question 2
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (-1, 0, -1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre.
- ☐ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- ☒ u_3 est une combinaison linéaire de u_1 et u_2.
- ☐ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 3
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ y - x + z = 0 \text{ et } x = 2y\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☒ $\{(2, 1, 1)\}$ est une base de E.
- ☐ E est un plan.
- ☐ $\dim E = 3$.
- ☒ $E = \text{Vect}\{(2, 1, 1)\}$.

Question 4
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, -1, 0)$ et on considère les sous-espaces vectoriels $E = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ et $F = \text{Vect}\{u_3\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☒ E est un plan vectoriel.
- ☐ Une équation cartésienne de F est $z = 0$.
- ☐ Une équation cartésienne de E est $x + 2y + z = 0$.
- ☒ F est une droite vectorielle.

Question 5
On considère les fonctions réelles f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \sin x \cos x$$

et E l'espace engendré par ces fonctions. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{f_1, f_2\}$ est une base de E.
- ☒ $\dim E = 3$.
- ☐ $\{f_1, f_3\}$ est une base de E.
- ☐ $\dim E = 2$.

Question 6
Soit $E = \{(x + z, z, z) ;\ x, z \in \mathbb{R}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de E.
- ☒ $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ est une base de E.
- ☒ $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de E.
- ☐ $\dim E = 3$.

Question 7

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x+y = y+z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x+y+z+t = 0\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- [ ] $\dim E = 1$.
- [x] $\dim F = 3$.
- [x] $\dim E \cap F = 1$.
- [ ] E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Question 8

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. On considère les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \to & P(0)+P'(0) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & 1+P'+XP'', \end{array}$$

où P' (resp. P'') est la dérivée première (resp. seconde) de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- [ ] $f(0) = 1$.
- [x] f est une application linéaire.
- [x] $g(0) = 1$.
- [ ] g est une application linéaire.

Question 9

On considère l' application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (x-z, y+z, x+y). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- [x] $\{(1,-1,1)\}$ est une base de $\ker f$.
- [ ] f est injective.
- [x] $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
- [ ] f est surjective.

Question 10

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et f l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (2x+y, 4x-3y). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- [ ] La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
- [x] La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
- [x] f est injective.
- [x] f est bijective.