حل السلسلة 7

التمرين الاول

1- بفرض ثابت ويساوي الواحد $K=1$

حساب عدد العمال في نهاية المنطقة الأولى بالنسبة للعمل : $Q=5L^2-L^3$

نستعمل طريقتين اما :

$MP_L=mP_L \rightarrow mP_L=0$ أو $(MP_L)'=0$

$$5L-L^2=10L-3L^2$$

$$L(2L-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} L=0 \\ L=\frac{5}{2} \end{cases}$$

نرفض القيمة 0 لانها نقطة المبدا ونقبل القيمة الثانية:

كمية الناتج في هذه الحالة $L=\frac{5}{2}$ هي : بالتعويض عن قيمة L في المعادلة نجد

$$Q=5\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^3=15{,}625$$

2- حساب عدد العمال اللازم للوصول إلى نقطة الإنعطاف على منحنى الناتج الكلي و كمية الناتج الكلي في هذه النقطة

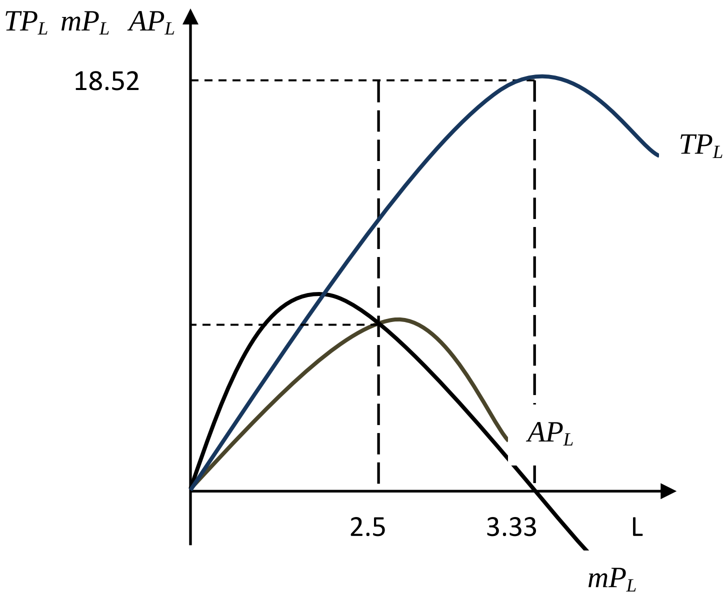
$$mP_L=0 \rightarrow 10L-3L^2=0 \rightarrow L(10-3L)=0 \Rightarrow L=0 \quad et \quad L=\frac{10}{3}$$

$L=0$ مرفوضة

كمية الناتج في هذه الحالة $L=\frac{10}{3}$ هي : بالتعويض عن قيمةL في المعادلة نجد

$$Q=5\left(\frac{10}{3}\right)^2-\left(\frac{10}{3}\right)^3=18{,}52$$

التمثيل البياني لمنحنيات الناتج الكلي , المتوسط و الحدي مع توضيح النقاط المشار إليها سابقا :



التمرين الثاني

1. نوع الدالة :هي دالة كوب – دوغلاس

2. درجة التجانس

$$Q = f(nL, nK) = (\sqrt{nL})(\sqrt{nK}) = (nL)^{1/2}(nK)^{1/2} = n^{1/2+1/2}L^{1/2}K^{1/2}$$
$$= nQ \rightarrow n^k Q \rightarrow k = 1$$

إن هذه الدالة متجانسة من الدرجة الأولى و منه فهي ذات غلة حجم ثابتة بمعنى أن الإنتاج يبقى ثابت فعلى سبيل المثال إذا زادت عناصرالإنتاج بـ 10% فإن الإنتاج يتزايد بـ 10%

3 – إيجاد دالتي الإنتاج الحدي و المتوسط لكل من العمل و راس المال :

1– الإنتاجية المتوسطة للعمل $AP_L = Q/L = K^{1/2}L^{1/2} \big/ L$

و تساوي= $AP_L = \left(\dfrac{K}{L}\right)^{1/2}$

الإنتاجية المتوسطة لرأس المال : $AP_k = Q/K = K^{1/2}L^{1/2} \big/ K$

و تساوي = $AP_K = \left(\dfrac{L}{K}\right)^{1/2}$

الإنتاجية الحدية للعمل $mP_L = \dfrac{\delta Q}{\delta L} = 1/2K^{1/2}L^{-1/2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1/2}$

الحدية لرأس المال $mP_K = \dfrac{\delta Q}{\delta K} = 1/2K^{-1/2}L^{1/2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L}{K}\right)^{1/2}$

4– التوليفة المثلى من K و L التي تحقق حجم إنتاج قدره40 وحدة إذا كانت أسعار عناصر الإنتاج تساوي $P_K = 3$ $P_L = 2$

$$\frac{mPl}{mPk} = \frac{Pl}{Pk} = \frac{1/2K^{1/2}L^{-1/2}}{1/2K^{-1/2}L^{1/2}} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{2}{3} \rightarrow K = \frac{2L}{3}$$

بالتعويض عن قيمة K في دالة الإنتاج نحصل على : $Q = \sqrt{L}\sqrt{K} \rightarrow K = \dfrac{Q^2}{L}$

و منه نحصل على: $\dfrac{Q^2}{L} = \dfrac{2L}{3} \Rightarrow L^2 = \dfrac{3Q^2}{2}$

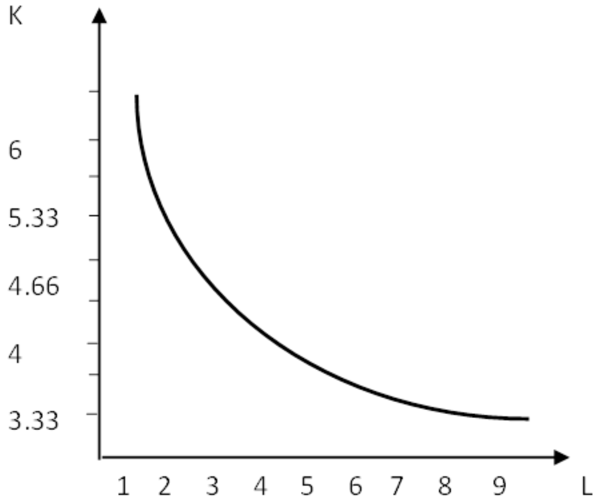
بالتعويض عن قيمة Q في المعادلة السابقة نحصل على قيمة $L = 49$

و منه $K = 32{,}65$

للتحقيق نعوض في دالة الإنتاج: $Q = \sqrt{32{,}65}\sqrt{49} = 40$

5– رسم المنحنى:

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K	2/3	4/3	2	8/3	10/3	4	14/3	16/3	18/3



6– العلاقة بين المعدل الحدي للإحلال التقني والإنتاج الحدي للعمل و رأس المال: $TSM_{LK} = \frac{mP_L}{mP_k}$

التمرين الثالث

إذا كان $K=1$ تصبح دالة إنتاج بالشكل $TP_L = 10L^2 - L^3$

من هذه المعادلة يمكن إستخراج الإنتاج المتوسط $AP_L = \frac{Q}{L} = 10L - L^2$

و الإنتاج الحدي من الشكل : $mP_L = \frac{\delta Q}{\delta L} = 20L - 3L^2$

تكون دالة الإنتاج في أعظم قيمة لها عندما يكون مشتقها الأول يساوي الصفر

$$mPl = = \frac{d(Q)}{dL} = \quad mP_L = \frac{\delta Q}{\delta L} = 20L - 3L^2 = 0 \rightarrow L = 0\, et \quad L = \frac{20}{3}$$

نلاحظ أن هناك قيمتين للعمل التي تحقق $mPl = 0$

$$L = 0 \Rightarrow Q = 0$$
$$L = 20/3 \Rightarrow Q = 148{,}14$$

$L = \frac{20}{3}$ هي حجم العمل الذي يسمح بالحصول على أكبر إنتاجية وحدوية أعظمية

3 – الإنتاجية بالوحدة معطاة : $AP_L = 10L - L^2$

هذه المعادلة تأخذ أعظم قيمة لها إذا كان مشتقها الأول يساوي الصفر:

$$\frac{d(AP_L)}{dL}=0 \rightarrow 10-2L=0 \rightarrow L=5$$

المشتق الثاني : $\frac{\delta^2 APl}{\delta^2 L}=-2 \prec 0$

من أجل $L=5 \Rightarrow AP_L=25$

3 – دراسة mP_L بين أن الإنتاجية الحدية موجبة في حالة : $0 \prec L \prec \frac{20}{3}$ من أجل قيمة L محصورة بين القيمتين لدينا تزايد في الإنتاج مع ذالك أن تزايد PT_L لايكون دائما في التزايد بنفس الإيقاع في المجال السابق عند دراسة mP_L نلاحظ بأن هذا الأخير يتزايد في المجال $0 \prec L \prec \frac{10}{3}$ و يتزايد كذالك في المجال $\frac{10}{3} \prec L \prec \frac{20}{3}$

mP_L يكون في أعظم قيمة له عند $L=\frac{10}{3}$ هذا يدل على أن في الوهلة الأولى أن الإنتاج الكلي Q يتزايد بمعدل متزايد (في مرحلة الصعود لمنحنى الناتج الحدي) و عند تجاوز القمة (يعني أعلى نقطة على منحنى الناتج الحدي) إرتفاع الإنتاج الكلي يكون بمعدل متناقص (في مرحلة هبوط منحنى الناتج الحدي) النقطة الغير مرنة لمنحنى الناتج الكلي لعنصر العمل $L=\frac{10}{3}$ يعني القيمة التي تعظم الإنتاجية الحدية

التمرين الرابع

– دالة الإنتاج الحدي للعمل : $mP_L=\frac{dQ}{dL}=\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$

– دالة الإنتاج الحدي لرأس المال: $mp_k = \frac{dQ}{dK}=\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}$

– دالة الإنتاج المتوسط للعمل : $APl = \frac{Q}{L}=2\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$

– دالة الإنتاج المتوسط لرأس المال : $APk = \frac{Q}{K} \quad 2\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}$

2–إيجاد حجم العمل و حجم رأس المال اللازمين إنتاج 100 وحدة

لدينا $Q=2(KL)^{1/2} \rightarrow 100=2(KL)^2$

$$CT=LP_L+KP_K=9L+4K$$

بإستخدام صيغة لاغرانج نجد : المشكلة هي :

$$\begin{cases} \int = CT+\lambda[Q-f(K,L)] \\ \int = 9L+4K+\lambda[100-2(KL)^{1/2}] \end{cases}$$

حل هذه المشكلة بإيجاد المشتقات الجزئية ثم نعدمها

$$\frac{\delta \int}{\delta L} = 0 \rightarrow 9 - \lambda\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{9}{\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}} \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\delta \int}{\delta K} = 0 \rightarrow 4 - \lambda\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{4}{\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}} \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\delta \int}{\delta \lambda} = 0 \rightarrow 100 - 2(KL)^{1/2} = 0 \rightarrow 100 = 2(KL)^{1/2} \ldots\ldots(1)$$

بقسمةالمعادلة 1 على المعادلة الثانية نحصل على : $L = \frac{4K}{9} \ldots\ldots\ldots(4)$

بالتعويض عن 4 في المعادلة الثالثة : $L = \frac{100}{3} \quad et \quad K = 75$

3- إيجاد حجم الإنتاج الموافق لتكلفة قدرها 504 وحدة نقدية

$$CT = LP_L + KP_K = 9L + 4K$$

$$Q = 2(KL)^{1/2}$$

بإستعمال صيغة مضاعف لاغرانج لإيجاد المشتقات الجزئية ثم نعدمها

- نشكل صيغة لاغرانج : $\int = Q + \lambda(CT - LP_L - KP_K)$

$$\int = 2(KL)^{1/2} + \lambda[504 - 9L - 4K]$$

نشتق و نعدم المشتقات الجزئية :

$$\frac{\delta \int}{\delta L} = 0 \rightarrow \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} - 9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}}{9} \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\delta \int}{\delta K} = 0 \rightarrow \left(\frac{L}{K}\right)^{1/2} - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}}{4} \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\delta \int}{\delta \lambda} = 0 \rightarrow [504 - 9L - 4K] = 0 \rightarrow 504 = 9L + 4K \ldots\ldots(2)$$

بقسمة المعادلة 1 على المعادلة 2 نحصل على : $9L = 4K \rightarrow L = \frac{4K}{9} \ldots\ldots(4)$

بالتعويض عن قيمة L في المعادلة 3 نجد: $K = 63 et \quad L = 28$

حجم الإنتاج الموافق لتكلفة قدرها 504 وحدة نقدية بالتعويض عن قيم K و L في دالة الإنتاج نحصل على : $Q = 84$

- حجم الربح المحقق من طرف المؤسسة :

الربح = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

الإيراد الكلي = سعرالوحدة الواحدة X الكمية المباعة

$$TR = P.Q = 84(5) = 672$$

الربح : $\pi = RT - CT = 672 - 504 = 168$

التمرين الخامس

E_L هي مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل و تساوي 0,5 و هي قيمة المعامل α يعني $\alpha = 0,5$ و لدينا الدالة متجانسة من الدرجة الثاني يعني أن $\alpha + \beta = 2$

و منه يمكن إستنتاج قيمة β حيث $0,5 + \beta = 2 \rightarrow \beta = 1,5$

$$\Leftrightarrow \quad \beta = \frac{3}{2}$$

و منه تصبح دالة الإنتاج من الشكل : $Q = L^{0,5}K^{1,5}$

2. غلة الحجم متزايدة لإن $\alpha + \beta \succ 1$ و بالتالي فإن زيادة عناصر الإنتاج بـ1 %فإن الإنتاج الكلي يزيد بـ2 %

3. - إيجاد المسار الأمثل للتوسع

$$\frac{mP_l}{mP_k} = \frac{P_l}{P_k} = \frac{0,5L^{-0,5}K^{1,5}}{1,5K^{0,5}L^{0,5}} = \frac{0,5K}{1,5L}$$

$$\frac{0.5K}{1.5L} = \frac{Pl}{Pk} \Rightarrow 1,5L \times P_L = 0,5K \times P_K$$

معادلة المسار الأمثل للتوسع هي : $K = \frac{1.5LP_L}{0.5P_K}$

4- دوال الطلب على عناصر الإنتاج:

دالة الطلب على عنصر رأس المال : $K = \frac{1.5LP_L}{0.5P_K}$

دالة الطلب على عنصر العمل : $L = \frac{0.5KP_k}{1.5P_L}$

5- منحنى الناتج المتساوي : $10 = L^{3/8}K^{5/8}$

نحصل على: $L^{3/8} = \frac{10}{K^{5/8}} \rightarrow L = (10)^{8/3}K^{-5/3}$

نحصل على ميل منحنى الناتج المتساوي:

و الذي هو عبارة عن معدل الإحلال الحدي $\frac{dL}{dK}$

$$\frac{dL}{dK} = 10^{8/3}(-5/3)K^{-5/3}$$

و يتحدد التوازن (حيث التكاليف أقل مايمكن) عندما يمس منحنى التكاليف المتساوي منحنى الناتج المتساوي و عند نقطة المماس يكون إنحدار المنحنيين واحد

و معروف أن إنحدار منحنى التكاليف المتساوي $\frac{dL}{dK} = \frac{P_L}{P_k} = \frac{-5}{3}$

كما يمكن الحصول على ميل منحنى التكاليف المتساوية من معادلة خط التكاليف حيث :

$$CT = 5K + 3L \rightarrow L = -\frac{5}{3}K + \frac{CT}{3}$$

وضع التوازن للمنتج يتحقق عند:

ميل منحنى التكاليف المتساوية = ميل منحنى الناتج المتساوي

$$10^{8/3}(-5/3)K^{-5/3} = -\frac{5}{3} \rightarrow$$

$$K = 10$$

ومنه:

و بالتعويض في معادلة منحنى الناتج نجد $L = 10$

عندما يكون $K = 10$ $L = 10 et$ وكذالك الإسعار هي : $P_K = 5$ et $P_L = 3$

فإننا نستطيع أن نحدد أقل التكاليف من معادلة منحنى التكاليف المتساوية :

$$CT = 3L + 5K = 3(10) + 5(10) = 80$$

معادلة منحنى التكاليف المتساوية هي $3L + 5K = 80$