Chapitre II. Conduction thermique

II.1. Introduction

Rappelons que la conduction nécessite un support matériel et que son origine est microscopique, liée aux atomes et aux molécules du milieu où se produit la conduction. La conduction peut être vue comme le transfert d'énergie de particules les plus énergétiques vers les particules les moins énergétiques, à cause des interactions prenant place entre elles. On sait que la température est une fonction croissante de l'agitation moléculaire dans un corps, qu'il soit solide, liquide ou gazeux. Considérons pour l'instant un corps solide au sein duquel la température varie. L'agitation moléculaire élevée de la zone chaude communiquera de l'énergie cinétique aux zones plus froides par un phénomène appelé conduction de la chaleur.

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux ou encore entre deux milieux en contact physique (gradient de température dans un milieu). Dans la plupart des cas, on étudie la conduction dans les milieux solides, puisque dans les milieux fluides (c'est-à-dire liquide ou gazeux), il y'a souvent couplage avec un déplacement de matière et donc mécanisme de convection.

La conduction est le seul mécanisme intervenant dans le transfert de chaleur dans un solide homogène, opaque et compact. Dans ce travail, on s'intéresse au mode de transfert de chaleur qui est la conduction thermique.

II.2. Définitions

On donne quelques définitions :

- ✓ **Température T**

Elle se définit en chaque point d'un corps liquide, solide ou gazeux. C'est une fonction scalaire de l'espace et du temps lorsque le problème en dépend (problème in stationnaire). L'unité de température est le degré Kelvin (K) ou encore le degré Celsius (°C).

- ✓ **Energie E**

L'énergie correspond à un transfert ou échange par interaction d'un système avec son environnement. Ce système subit alors une transformation. On distingue habituellement deux types d'énergie : le travail qui peut prendre diverses formes selon l'origine physique du transfert en jeu (électrique, magnétique, mécanique, etc.), et la chaleur.

- ✓ **Flux de chaleur Φ**

C'est la quantité de chaleur qui traverse une surface S par unité de temps. L'unité de flux de chaleur est le Watt (W).

$$\Phi = dQ/dt \qquad \text{(II.1)}$$

- ✓ **Densité de flux φ**

Elle représente la puissance qui traverse l'unité de surface. L'unité de flux de chaleur est le Watt par mètre au carré (W/m^2).

Pour une surface perpendiculaire au flux de chaleur :

$$\varphi = d\Phi/dS \qquad \text{(II.2)}$$

Si le flux est homogène en tout point de la surface alors :

$$\varphi = \Phi/\,S \qquad \text{(II.3)}$$

II.3. Loi de Fourier

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de mathématicien et physicien Français, Jean Baptiste Joseph Fourier en 1822 : En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantané, est proportionnelle à la conductivité thermique du milieu et au gradient de température.

$$\emptyset = -\lambda S \frac{dT}{dX} \qquad \text{(II. 4)}$$

Avec :

Φ : Flux de chaleur transféré (W)

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m)

X : Variable d'espace dans la direction du flux λ : Coefficient de proportionnalité appelé conductivité thermique ou conductance spécifique. (W/m K).

Le signe (-) correspond à une convention qui impose une quantité de chaleur échangée positive (dQ > 0) dans le sens des températures décroissantes et des x croissants. Il est a noté que cette convention est en fait opposée à elle choisie généralement en thermodynamique classique ou l'on impose toujours que toute énergie perdue par le système est comptée négativement.

- ✓ **Conductivité thermique (λ)**

Est le flux de chaleur qui traverse une surface unité pour un matériau soumis à un gradient de température égal à l'unité. Elle dépend de la nature physico-chimique du matériau, de la nature de la phase considérée (solide, liquide, gaz), de la température et de l'orientation dans les matériaux anisotrope.

La conductivité thermique dépend de la température lorsque l'on considère des plages étendues de température. Dans la suite de ce cours on considérera systématique la conductivité thermique comme un scalaire constant ce qui revient à se placer dans le cas de matériaux homogènes et isotropes. Cette simplification n'est cependant pas abusive car il est souvent difficile de procéder différemment et même dans le cas de matériaux typiquement inhomogènes (béton par exemple) on considère une conductivité moyenne appelée conductivité effective.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de la conductivité thermique de certains matériaux parmi les plus courants.

Tableau. II. 1. Conductivité thermique de certains matériaux

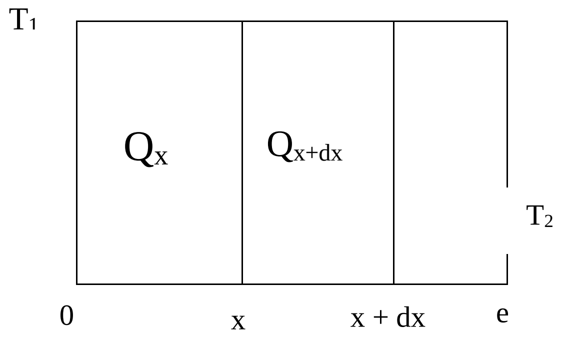
Matériau	λ (W/m °C)	Matériau	λ (W/m °C)
Argent	419	plâtre	0.48
Cuivre	386	Amiante	0.16
Aluminium	204	Bois (Feuillu résineux)	0.12 – 0.23
Acier Doux	45	Liège	0.044 – 0.049
Acier inox	15	Laine de roche	0.038 – 0.041
Glace	1.88	Polystyrène expansé	0.036 – 0.047
Béton	1.4	Laine de verre	0.035 – 0.051
Brique terre cuite	1.1	Polyuréthane (mousse)	0.03 – 0.045
Verre	1	Polystyrène extrudé	0.028
eau	0.6	Air	0.026

II.4. Etude des modèles élémentaires

II.4.1. Cas d'un mur

II.4.1.1. Cas d'un mur simple (monocouche)

La figure représente une coupe transversale d'un mur de surface S, d'épaisseur e et de conductivité thermique λ.



On note T_1 : température de la paroi à x = 0.

T_2 : température à x = e.

Considérons un système d'épaisseur dx. Si le transfert thermique est indirectionnel ou il n y'a pas ni stockage, ni génération d'énergie.

Bilan d'énergie :

$$Q_{entrant} = Q_{Sortant} \Longrightarrow Q_e = Q_S \Longrightarrow Q_X = Q_{x+dx} = \text{constant}$$

On a la loi de Fourier : $\mathbf{Q = -\lambda.S.\frac{dT}{dx}}$

$$Q.dx = -\lambda.s.dT \Longrightarrow Q.\int_0^e dx = -\lambda.s.\int_{T1}^{T2} dT \Longrightarrow Q.e = -\lambda.s.(T_2 - T_1)$$

$$= \lambda.s.(T_1 - T_2)$$

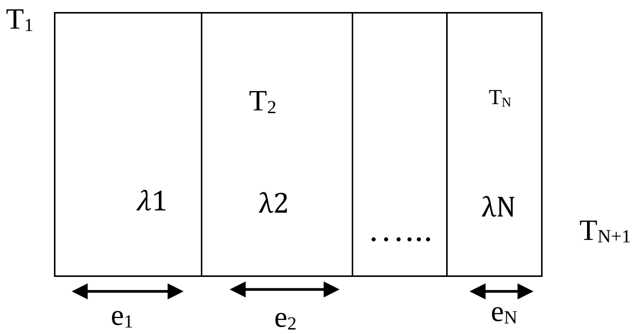
$\Longrightarrow Q = \frac{\lambda.s.\ (T_1 - T_2)}{e} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda.s}}$ avec $\frac{e}{\lambda.s} = R_{th}$: résistance thermique

Donc $Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$

Cette loi $R_{the} = \frac{e}{\lambda.s}$ est analogue à la loi d'ohm en électricité qui définit l'intensité de courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique.

II.4.1.2. Cas d'un mur composite (multicouche)

- **Cas d'un composite en série**



Soit un mur composite de plusieurs couches d'épaisseur $e_1, \dots \dots \dots . e_N$ de surface S, de conductivité thermique $\lambda_1, \dots \dots \dots .. \lambda_N$

Avec : $T_1 > T_{N+1}$ (Transfert de chaleur de corps plus chaud au corps moins chaud)

La température à x = 0 est T_1 x : variation d'épaisseur

La température à x = $\sum ei = e_1 + \cdots \dots \dots .. + e_N$ est T_{N+1}

$$Q = constant = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_1 . s}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_2}{\lambda_2 . S}} =, \dots \dots . = \frac{T_N - T_{N+1}}{\frac{e_N}{\lambda_N . S}}$$

Donc : $T_1 - T_2 = \frac{Q.e_1}{\lambda_1 . S}$

$T_2 - T_3 = \frac{Q.\ e_2}{\lambda_2 . S}$

$\vdots$

$T_N - T_{N+1} = \frac{Q.\ e_N}{\lambda_N . S}$

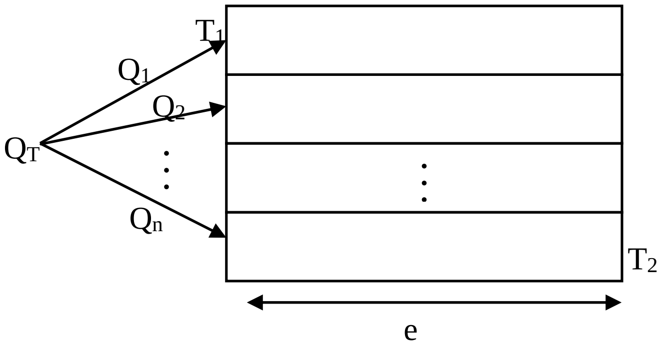
On fait la somme :

$$T_1 - T_{N+1} = Q\left[\frac{e_1}{\lambda_1 . S} + \frac{e_2}{\lambda_2 . S} + \cdots \dots \dots \frac{e_N}{\lambda_N . S}\right]$$

$$Q = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\frac{e_1}{\lambda_1 . S} + \frac{e_2}{\lambda_2 . S} + \cdots \ldots . . + \frac{e_N}{\lambda_N . S}} = \frac{T_1 - T_{N+1}}{R_{thg}}$$

Avec R_{thg} : résistance thermique globale

- **Cas d'un mur en parallèle**



$$Q_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_1}, Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_2}, \ldots \ldots . . , Q_N = \frac{T_1 - T_2}{R_N}$$

$$Q_T = \sum Q = Q_1 + Q_2 + \cdots \ldots . + Q_N = T_1 - T_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \ldots . + \frac{1}{R_N} \right)$$

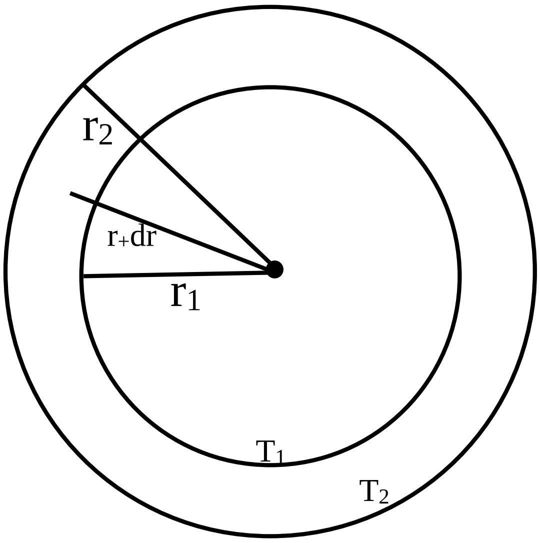
$$\frac{1}{R_{thg}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \ldots . . + \frac{1}{R_N}$$

$$Q_T = \frac{T_1 - T_2}{R_{thg}}$$

II.4.2. Cas d'un cylindre

II.4.2.1. Cas d'un cylindre simple (monocouche)

La figure représente une coupe transversale d'un cylindre creux de conductivité thermique λ, de rayon interne r_1 et rayon externe r_2. La température de face interne T_1 et la température de face externe T_2.



On suppose que le gradient longitudinale de température est négligeable (ni stockage, ni génération)

Bilan thermique : $Q_r = Q_{r+dr} \quad = constant$

$Q = -\lambda\, S \frac{dT}{dr}$ $\qquad S_{cylindre} = 2\pi.r.l$ $\qquad$ avec l : longueur du cylindre

$$Q = -\lambda.2\pi.l.r.\frac{dT}{dr} \Longrightarrow Q\int_{r1}^{r2}\frac{dr}{r} = -\lambda.2.\pi.l.\int_{T1}^{T2} dT$$

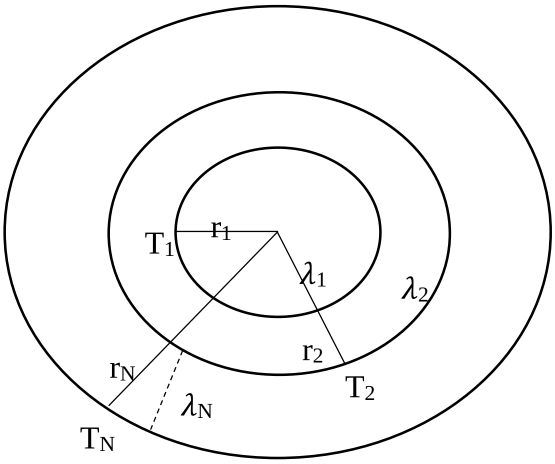
$Q \ln\frac{r_2}{r_1} = 2.\pi.l.\lambda\,(T_1 - T_2).$ $\qquad$ Donc $Q = \frac{2.\pi.l.\lambda(T_1-T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{T_1-T_2}{\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda}} = \frac{T_1-T_2}{R_{thg}}$

$$R_{thg} = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda}$$

II.4.2.2. Cas d'un cylindre multicouche

La figure représente une coupe transversale d'un cylindre multicouche creux.

La température de la face interne T_1. La température de la face externe T_N. Chaque couche est caractérisée par une λ.



Bilan thermique :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda_1}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2.\pi.l.\lambda_2}} = \cdots \ldots \ldots \ldots, = \frac{T_{N-1} - T_N}{\frac{\ln\frac{r_N}{r_{N-1}}}{2.\pi.l.\lambda_{N-1}}}$$

$$T_1 - T_2 = Q.\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda_1}$$

$$T_2 - T_3 = Q.\frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2.\pi.l.\lambda_2}$$

$$T_{N-1} - T_N = Q.\frac{\ln\frac{r_N}{r_{N-1}}}{2.\pi.l.\lambda_{N-1}}$$

On fait la somme :

$$T_1 - T_N = Q.\left[\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda_1} + \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2.\pi.l.\lambda_2} + \cdots \ldots . + \frac{\ln\frac{r_N}{r_{N-1}}}{2.\pi.l.\lambda_{N-1}}\right]$$

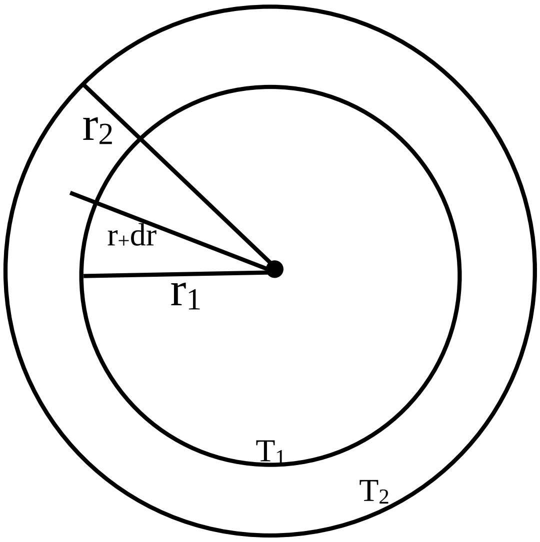
$$Q = \frac{T_1 - T_N}{\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda_1} + \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2.\pi.l.\lambda_2} + \cdots \ldots . + \frac{\ln\frac{r_N}{r_{N-1}}}{2.\pi.l.\lambda_{N-1}}} = \frac{T_1 - T_N}{R_{thg}}$$

$$R_{thg} = \text{résistance thermique globle} = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda_1} + \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2.\pi.l.\lambda_2} + \cdots \ldots . + \frac{\ln\frac{r_N}{r_{N-1}}}{2.\pi.l.\lambda_{N-1}}$$

II.4.3. Cas d'une sphère

II.4.3.1. Cas d'une sphère monocouche

Soit une coupe transversale d'une sphère creuse de conductivité thermique λ. rayon interne r_1 et rayon externe r_2. On suppose qu'il n'y'a pas ni stockage, ni génération.



Bilan thermique : $Q_r = Q_{r+dr} = Q_{constant}$

$Q = -\lambda . S . \frac{dT}{dr}$ avec $S = 4 . \pi . r^2$

$$Q . d_r = -\lambda . 4 . \pi . r^2 . dT$$

$$Q . \int_{r_1}^{r_2} \frac{d_r}{r^2} = -\lambda . 4 . \pi \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$Q \int_{r_1}^{r_2} \left(-\frac{1}{r}\right) = -4\pi\lambda\,(T_2 - T_1)$$

$$Q\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) = -4\pi\lambda\,(T_2 - T_1)$$

$$Q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 4\pi\lambda\,(T_1 - T_2)$$

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{thg}},\ R_{thg} = \frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda}$$

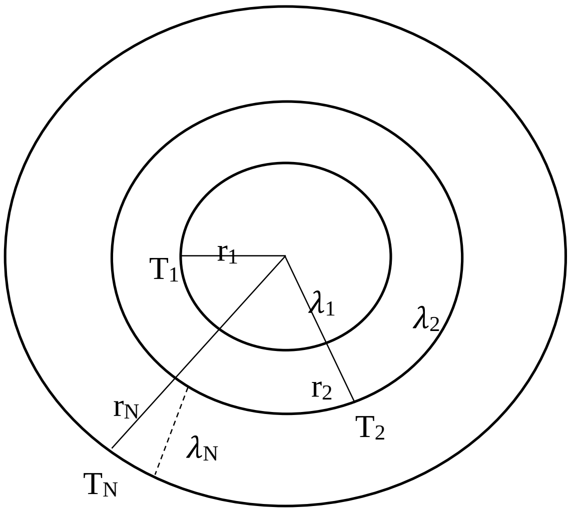
II.4.3.2. Cas d'une sphère composite (multicouche)

Supposant une sphère creuse multicouche de rayon interne r_1 et de rayon externe r_N.

T_1 : température interne.

T_N : température externe.

Conductivité thermique de λ_1à λ_N



Bilan thermique (flux thermique) :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda_1}}$$

$$Q = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{4\pi\lambda_2}}$$

$$Q = \frac{T_{N-1} - T_N}{\frac{\frac{1}{r_{N-1}}-\frac{1}{r_N}}{4\pi\lambda_{N-1}}}$$

Donc : $T_1 - T_2 = \frac{Q\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}{4\pi\lambda_1}$

$$T_2 - T_3 = \frac{Q\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)}{4\pi\lambda_2}$$

$$\vdots$$

$$T_{N-1} - T_N = \frac{Q\left(\frac{1}{r_{N-1}}-\frac{1}{r_N}\right)}{4\pi\lambda_{N-1}}$$

On fait la somme :

$$T_1 - T_N = Q\left[\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda_1} + \frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{4\pi\lambda_2} + \cdots \ldots \ldots .. + \frac{\frac{1}{r_{N-1}}-\frac{1}{r_N}}{4\pi\lambda_{N-1}}\right]$$

$$Q = \frac{T_1 - T_N}{\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda_1} + \frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{4\pi\lambda_2} + \cdots \ldots \ldots .. + \frac{\frac{1}{r_{N-1}}-\frac{1}{r_N}}{4\pi\lambda_{N-1}}}$$

$$Q = \frac{T_1 - T_N}{R_{thg}}$$

II.5. Conclusion

La conduction thermique (ou diffusion thermique) est un mode de transfert thermique provoqué par une différence de température entre deux régions d'un même milieu, ou entre deux milieux en contact, et se réalisant sans déplacement global de matière.

La conduction thermique est un transfert thermique spontané d'une région de température élevée vers une région de température plus basse, et est décrite par la loi dite de Fourier établie mathématiquement par Jean-Baptiste Biot en 1804 puis expérimentalement par Fourier en 1822.

La conduction est l'un des modes les plus importants de transfert de chaleur, importance établie par la place que ce mode occupe dans les problèmes les plus pratiques d'ingénierie énergétique. Transferts d'énergie par conduction examine de manière détaillée la conduction de la chaleur ; il met en évidence les équations qui régissent ce phénomène, puis les applique à une série de situations pratiques.