Équation de Klein-Gordon

6.1 Introduction

De par sa construction qui considère le temps comme découplé des variables d'espace, la mécanique quantique n'est pas compatible avec les principes de relativité restreinte. Expérimentalement, on observe aussi que, la mécanique quantique n'est précise que lorsque les phénomènes observés ne mettent en jeu que des particules à faible vitesse. Elle n'est par exemple pas un bon modèle pour décrire toutes les expériences où il y a interaction entre la lumière et la matière.
Nous présentons dans ce chapitre les premières tentatives pour modifier la mécanique quantique afin de la rendre relativiste. Nous allons d'abord chercher à trouver une équation relativiste. En d'autres termes, nous commençons à travailler avec une particule de spin nul. Dans ce cadre, pour bâtir une théorie relativiste, il est naturel de travailler dans l'espace de la relativité restreinte de Minkowski.
Afin de décrire des particules quantiques de spin nul et ayant des vitesses relativistes, on introduit l'équation de Klein-Gordon. Cette dernière est l'équivalent relativiste de l'équation de Schrödinger donnée par,

$$H\psi = E\psi \tag{6.1}$$

En utilisant le principe d'équivalence, sa forme devient

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi, \qquad \overrightarrow{p} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla} \tag{6.2}$$

On sait que dans le cas des ondes planes, les fonctions $\psi(\overrightarrow{r}, t)$ qui sont solutions de l'équation de Schrodinger sont données par

$$\psi(\overrightarrow{r}, t) = e^{i(\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}}{\hbar} - \frac{E\cdot t}{\hbar})} \tag{6.3}$$

On va essayer dans ce qui suit de trouver la forme générale de l'équation de Klein-Gordon, nous permettant de décrire le mouvement de particules libres, de spin nul et ayant des vitesse relativistes, en démarrant de l'équation de Schrodinger.

6.2 Quadri-vecteurs en théorie des champs

Rappelons que l'énergie relativiste d'une particule libre est donnée par

$$E = \sqrt{\overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{6.4}$$

- $\overrightarrow{p}$: impulsion
- c : vitesse de la lumière
- m : masse de la particule

Le quadri-vecteur énergie-impulsion $\overrightarrow{P}$ est définit par,

$$\overrightarrow{\mathbf{P}} = \left(\overrightarrow{p}, \frac{E}{c}\right) \tag{6.5}$$

En théorie des champs, on utilise la convention d'Einstein. Si $\overrightarrow{A}$ est un quadri-vecteur, on le note A_μ avec $\mu = 1, 2, 3, 4$. Le quadri-vecteur A_μ a les composantes suivantes:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ia_4 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

Si on calcule le produit scalaire de deux quadri-vecteurs A_μ et B_ν, on trouve

$$A_\mu B_\nu = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ia_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ib_4 \end{pmatrix} = +a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 \tag{6.7}$$

Ce produit scalaire vérifie la métrique de l'espace de Minkowski $(+, +, +, -)$.
Donc, en théorie des champs, le quadri-vecteur énergie-impulsion s'écrit:

$$P_\mu = \left(\overrightarrow{p}, i\frac{E}{c}\right) \tag{6.8}$$

Rappelons aussi qu'en mécanique quantique, que E et $\overrightarrow{p}$ sont définit par:

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad \overrightarrow{p} \rightarrow -i\hbar\overrightarrow{\nabla} \tag{6.9}$$

En remplaçant (6.9) dans (6.8), on trouve

$$P_\mu = \left(-i\hbar\overrightarrow{\nabla}, i\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) = -i\hbar\left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{6.10}$$

Si on pose,

$$\partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{6.11}$$

où ∂_μ représente le quadri-vecteur dérivée spatio-temporelle, on trouve

$$P_\mu = -i\hbar\partial_\mu \tag{6.12}$$

6.3 Équation de Klein-Gordon libre

Trouvons maintenant l'équation de Klein-Gordon libre décrivant le mouvement (déplacement) d'une particule quantique, de spin nul et de vitesse relativiste.
En mécanique quantique, une particule libre est décrite par l'équation d'évolution de Schrodinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\overrightarrow{r}, t) = E\phi(\overrightarrow{r}, t) \quad \text{où} \quad E = H = E_c + V = E_c + 0 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{avec} \quad v << c \tag{6.13}$$

Pour une particule relativiste libre

$$E_R = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4} \tag{6.14}$$

La dynamique de ces particules relativistes sera décrite par l'équation suivante

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\overrightarrow{r}, t) = E_R \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4} \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) \tag{6.15}$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi(\overrightarrow{r}, t) = \left(\sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4}\right)^2 \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) \tag{6.16}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r}, t) = \left(\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4\right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) \tag{6.17}$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \phi(\overrightarrow{r}, t) = \left(\left(-i\hbar \overrightarrow{\nabla} \right)^2 c^2 + m^2 c^4 \right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) \tag{6.18}$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \phi(\overrightarrow{r}, t) = \left(\left(-i\hbar \overrightarrow{\nabla} \right)^2 c^2 + m^2 c^4 \right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) \tag{6.19}$$

$$\frac{-\hbar^2}{\hbar^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \phi(\overrightarrow{r}, t) + \frac{\hbar^2 \overrightarrow{\nabla}^2 c^2}{\hbar^2 c^2} \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = 0 \tag{6.20}$$

Si on pose $\overrightarrow{\nabla}^2 = \Delta$, on retrouve l'équation suivante

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = 0 \tag{6.21}$$

Cette dernière équation représente l'équation de Klein-Gordon libre écrite dans l'espace réel. Cherchons la forme de cette équation dans l'espace de Minkowski.

On a

$$\partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Longrightarrow \partial_\mu^2 = \partial_\mu \cdot \partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \tag{6.22}$$

$$\partial_\mu^2 = \left(\Delta, -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \right) = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \tag{6.23}$$

En remplaçant (6.23) dans (6.21), on trouve

$$\left(\partial_\mu^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = 0 \tag{6.24}$$

Si on pose $\hbar = c = 1$ et $(\overrightarrow{r}, t) = x_\mu$ où x_μ représente un point de l'espace de Minkowski et $\mu = 1, 2, 3, 4$, l'équation (6.24) devient

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2 \right) \phi(x_\mu) = 0 \tag{6.25}$$

Cette équation représente l'équation de Klein-Gordon libre écrite dans l'espace de Minkowski.

6.4 Invariance de l'équation de Klein-Gordon libre par transformation de jauge

Exercice 10 :

Le mouvement d'une particule de masse m, de spin nul et de vitesse relativiste c est décrit par l'équation Klein-Gordon libre suivante

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right)\phi(x_\mu) = 0$$

- Montrer que cette équation est invariante dans la transformation de jauge suivante

$$\phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x_\mu) = e^{-iq\alpha(x_\mu)}\phi(x_\mu) \quad , \quad \phi(x_\mu), \alpha(x_\mu) \quad \text{sont deux réels arbitraires.}$$

6.5 Solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

L'équation de Klein-Gordon libre est donnée par

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right)\phi(x_\mu) = 0 \quad \text{qu'on peut écrire} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = 0 \tag{6.26}$$

Cette équation admet une solution en états stationnaires. Sa forme générale est donnée par,

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = f(t) \cdot \psi(\overrightarrow{r}) \tag{6.27}$$

On dit qu'une solution en états stationnaires est une solution à variables séparables. Remplaçons (6.27) dans (6.26), on trouve

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad f(t) \cdot \psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.28}$$

$$f(t)\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \psi(\overrightarrow{r})\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}f(t)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.29}$$

Si on divise toute l'équation sur $f(t)\psi(\overrightarrow{r})$, on trouve

$$\frac{f(t)\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{1}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})}\psi(\overrightarrow{r})\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{1}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}f(t)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.30}$$

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{1}{f(t)}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = 0 \tag{6.31}$$

Cette équation est une équation du second ordre à deux variables indépendantes.

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \text{constante}, \quad \text{avec} \quad f'' = \frac{\partial^2}{\partial^2 t} f(t) \tag{6.32}$$

Si on pose $constante = \omega^2$, on retrouve

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \omega^2 \tag{6.33}$$

A partir de cette équation on obtient les deux équations suivantes:

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \omega^2 \Longrightarrow \frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} = \omega^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\omega^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.34}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \omega^2 \Longrightarrow \frac{f''(t)}{f(t)} = c^2\omega^2 \Longrightarrow f''(t) = c^2\omega^2 f(t) \Longrightarrow f''(t) - c^2\omega^2 f(t) = 0 \tag{6.35}$$

L'équation (6.35) peut s'écrire sous la forme générale suivante

$$f''(t) \pm (c\omega)^2 f(t) = 0 \tag{6.36}$$

L'équation (6.35) admet alors des solutions de la forme

$$f(t) = A\, e^{c\omega t} + B\, e^{-c\omega t} \tag{6.37}$$

Pour avoir des solutions continues partout, on pose

$$c\,\omega = \frac{i\,E}{\hbar}, \quad E \text{ est un réel.} \tag{6.38}$$

On remplaçant (6.37) dans (6.38), on trouve

$$f(t) = A\, e^{\frac{i\,E}{\hbar}t} + B\, e^{-\frac{i\,E}{\hbar}t} \tag{6.39}$$

On a

$$c\,\omega = \frac{i\,E}{\hbar} \Longrightarrow c^2\,\omega^2 = -\frac{E^2}{\hbar^2} \Longrightarrow \omega^2 = -\frac{E^2}{c^2\hbar^2} \tag{6.40}$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (6.34)

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(-\frac{E^2}{c^2\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \tag{6.41}$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(-\frac{E^2}{c^2\hbar^2} + \frac{m^2c^4}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-E^2 + m^2c^4}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.42}$$

Or,

$$E^2 = \overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4 \Longrightarrow -\overrightarrow{p}^2c^2 = -E^2 + m^2c^4 \tag{6.43}$$

En remplaçons dans l'équation précédente, on trouve

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-\overrightarrow{p}^2c^2}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-\overrightarrow{p}^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \tag{6.44}$$

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{i\,\overrightarrow{p}}{\hbar}\right)^2\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.45}$$

Cette équation admet des solutions de la forme suivante

$$\psi(\overrightarrow{r}) = C\,e^{\frac{i\,\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{\hbar}} + D\,e^{-\frac{i\,\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{\hbar}} \tag{6.46}$$

6.6 Interprétation physique des solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

Pour donner un sens physique aux solutions, on pose

- $e^{-\frac{i\,E}{\hbar}t}$ représente une particule créée dans le passé $(-\infty)$ et qui voyage vers le futur $(+\infty)$
- $e^{\frac{i\,E}{\hbar}t}$ représente une particule créée dans le futur $(+\infty)$ et qui voyage vers le passé $(-\infty)$.
- A représente la probabilité pour que la particule soit crée dans le futur $(+\infty)$ et qui voyage vers le passé $(-\infty)$.
- B représente la probabilité pour que la particule soit crée dans le passé $(-\infty)$ et qui voyage vers le futur $(+\infty)$.

Donc, la solution physique est donnée par

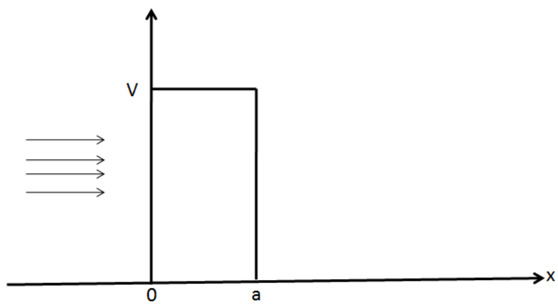
$$f(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \tag{6.47}$$

Où la probabilité B pour que la particule est créée dans le passé et elle voyage vers le futur est égale à 1. Donc la probabilité A pour que la particule est créée dans le futur et elle voyage vers le passé est égale à 0. La solution Finale est donnée par

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = f(t) \cdot \psi(\overrightarrow{r}) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \left(C\, e^{\frac{i\overrightarrow{p}\overrightarrow{r}}{\hbar}} + D\, e^{-\frac{i\overrightarrow{p}\overrightarrow{r}}{\hbar}} \right) \tag{6.48}$$

<u>Exercice</u> 11 :

Des particules de spin 0, de charge q et de masse m sont incidentes de $(+\infty)$ vers $(-\infty)$ sur une barrière de potentiel de hauteur V et de largeur a. Sachant que l'énergie de ces particules est donnée par $E = qV/2$, tel que $qV > 2mc^2$,



1. Calculer les coefficients de transmission T et de réflexion R.
2. Calculer la densité de courant J_x dans chaque région.

<u>Indication</u>: travailler à une dimension.

6.7 Équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Cette équation permet de décrire une particule de charge q interagissant avec le champ électromagnétique extérieur, représenté par le quadri-vecteur potentiel $A_\mu = \left(\overrightarrow{A}, i\frac{\phi}{c}\right)$.
Afin d'avoir l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur, on utilise la méthode du couplage minimale, qui consiste à remplacer l'impulsion et l'énergie $(\overrightarrow{p}, E)$ par

$$E \to E - q\phi \qquad \overrightarrow{p} \to \overrightarrow{p} - q\overrightarrow{A} \tag{6.49}$$

dans l'équation de Klein-Gordon libre. La transformation donnée dans l'équation (6.49) peut être réécrite en utilisant les quadri-vecteurs. Sa forme est donnée par:

$$P_\mu \to P_\mu - qA_\mu \tag{6.50}$$

__Exercice__ **12** :

- Montrer que les deux transformations données dans les deux équation (6.49) et (6.50) sont équivalentes.

On a

$$P_\mu = -i\hbar\,\partial_\mu \Longrightarrow P_\mu = -i\,\partial_\mu \quad \text{pour } \hbar = 1 \tag{6.51}$$

La transformation (6.50) devient alors,

$$-i\,\partial_\mu \to -i\,\partial_\mu - qA_\mu \Longrightarrow \partial_\mu \to \partial_\mu - iqA_\mu \Longrightarrow \partial_\mu \cdot \partial_\mu \to \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \tag{6.52}$$

Si on remplace dans l'équation de Klein-Gordon libre

$$\left[\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0 \tag{6.53}$$

Cette équation est appelée, équation de Klein-Gordon en présence d'un champs électromagnétique extérieur A_μ. Si on pose $D_\mu = \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)$, alors l'équation (6.53) s'écrit

$$\left[D_\mu D_\mu - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0 \tag{6.54}$$

Le conjugué de cette dernière équation est donné par

$$\left[D^*_\mu D^*_\mu - m^2\right] \phi^*(x_\mu) = 0 \Longrightarrow \left[(\partial_\mu + iqA_\mu)\,(\partial_\mu + iqA_\mu) - m^2\right] \phi^*(x_\mu) = 0 \qquad (6.55)$$

6.8 Invariance de l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur par transformation de jauge

Exercice 13 :

En présence d'un champ électromagnétique extérieur $A_\mu(\overrightarrow{A}, iV)$, le mouvement d'une particule de masse m, de spin nul et de vitesse relativiste c est décrit par l'équation Klein-Gordon suivante

$$\left[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\mu - iqA_\mu) - m^2\right] \phi(x_\mu) = 0$$

- Montrer que cette équation est invariante dans la transformation de jauge suivante

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x_\mu) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x_\mu) = e^{-iq\alpha(x_\mu)}\phi(x_\mu) \quad , \quad \phi(x_\mu), \alpha(x_\mu) \text{sont deux réels arbitraires.} \end{cases}$$

6.9 Courant de l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Exercice 14 :

L'équation de Klein-Gordon décrivant le mouvement d'une particule relativiste, de masse m, de charge q et en présence d'un champ électromagnétique-magnétique extérieur $A_\mu(\overrightarrow{A}, i\phi)$ est donnée

$$\left[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\mu - iqA_\mu) - m^2\right] \psi(x) = 0$$

Trouver l'expression du quadri-vecteur courant de Klein-Gordon J_μ qui est solution de l'équation

$$\partial_\mu J_\mu = 0$$

On donne : $(\partial_\mu^* - iqA_\mu^*)(\partial_\mu^* - iqA_\mu^*) = (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu)$

6.10 Exercices d'application

Exercice 15 :

Des particules de spin 0, de charge q et de masse m sont incidentes de $(-\infty)$ vers $(+\infty)$ sur une barrière de potentiel de hauteur V et de largeur a.
Sachant que l'énergie de ces particules est donnée par $E = qV/2$, tel que $qV > 2mc^2$,

1. Retrouver la forme générale de la fonction d'onde à l'extérieur de la barrière de potentiel.
2. Calculer la densité de courant J_x à l'extérieur de la barrière de potentiel lorsque la fonction d'onde est donnée par
$$\phi(x) = e^{ipx}$$
3. Montrer que le coefficient de transmission T s'écrit comme
$$T = \frac{4pp^{'}}{\left(p+p^{'}\right)e^{ia\left(p-p^{'}\right)} - \left(p-p^{'}\right)e^{ia\left(p+p^{'}\right)}}$$
lorsque l'impulsion p des particules à l'extérieur de la barrière de potentiel et différente de l'impulsion $p^{'}$ des particules à l'intérieur de la barrière de potentiel.
On donne: $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ et $p^{'} = \sqrt{\left(E - qV\right)^2 - m^2}$ avec $c = \hbar = 1$. Indication: Travailler à une dimension

Exercice 16 :

1. Retrouver la forme générale de l'équation de Klein-Gordon libre à partir de de l'équation de Schrodinger.
2. Retrouver la forme générale de l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur en utilisant la méthode du couplage minimale.
3. Retrouver les solutions de l'équation de Klein-Gordon libre.

Exercice 17 :

L'équation de Klein-Gordon (Adjointe), en présence d'un champ électromagnétique-magnétique extérieur $A_\mu(\overrightarrow{A}, \frac{i\phi}{c})$, est donnée par

$$\left[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu) - m^2\right]\phi^*(x_\mu) = 0$$

1. Montrer que cette équation est invariante dans la transformation de jauge suivante:

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x_\mu) \\ \phi^*(x) \longrightarrow \phi^*(x)' = e^{-iq\alpha(x_\mu)}\phi^*(x) \quad , \quad \alpha(x_\mu) \text{ est un réel arbitraire} \end{cases}$$

Exercice 18 :

1. Retrouver l'expression du quadri-vecteur densité de courant à partir de de l'équation de continuité.
2. Retrouver l'expression du quadri-vecteur potentiel à partir de de l'équation de la jauge de Lorentz.