Symétrie et invariance

5.1 Définition

Une loi physique est dite invariante, lorsque cette dernière reste inchangée dans un changement de coordonnées et de variables.

Exemple:

En mécanique classique:

- Les coordonnées sont représentées par: $\overrightarrow{r}, t, \cdots$
- Les variables sont représentées par: $\overrightarrow{r}(t)$, $\overrightarrow{p}(t), \cdots$

En mécanique quantique:

- Les coordonnées sont représentées par: $\left(\overrightarrow{r}, t\right), \cdots$
- Les variables sont représentées par: $\psi\left(\overrightarrow{r}, t\right)$, $\psi(t), \cdots$

En mécanique analytique:

- Les coordonnées sont représentées par: $q(t)$, $p(t) \cdots$
- Les variables sont représentées par: $\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \cdots$

5.2 Types de transformations

Il existent deux types de transformations:

5.2.1 Transformations géométriques

Les transformations géométriques qui existent sont:

- Déplacement dans l'espace.
- Déplacement dans le temps.
- Rotation.
- Renversement du temps T.
- Inversion de l'origine P.

5.2.2 Transformations internes

Une particule peut être soumises aux transformations internes suivantes:

- Inter-changer des particules identiques.
- Inter-changer des particules et des anti-particules. Cette transformation est souvent appelée "conjugaison de charge", qu'on note C.

Remarque:

Les trois transformations C, P, T sont des transformations discrètes.

5.2.3 Transformations géométriques internes

Pour ce type de transformation, on peut cité la transformation de Galilée, donnée par

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{r} \rightarrow \overrightarrow{r}' = \overrightarrow{r} + \overrightarrow{v} t \\ t \rightarrow t^{'} = t \end{array} \right. \tag{5.1}$$

5.3 Symétries et lois de conservation

Dans cette section, on supposera que la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de (x_μ). On supposera aussi que les équations de mouvement (donc de l'action) restent inchangées lors d'une transformation (continue) infinitésimale définit par,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_\mu \longrightarrow x_\mu^{'} = x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi^{'}(x_\mu^{'}) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) \end{array} \right. \tag{5.2}$$

Avec,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow \text{position spatio-temporelle (coordonnées)} \\ \delta x_\mu \longrightarrow \text{variation infinitisimale (deplacement l'espace et dans le temps)} \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \text{champ scalaire (variable)} \\ \delta\phi(x_\mu) \longrightarrow \text{variation de phase (dûe à une rotation)} \end{cases}$$

5.3.1 Exemple de transformation

Transformation spatio-temporelle

Une transformation spatio-temporelle est définit par

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + a_\mu \;\;, \quad (a_\mu = \delta x_\mu) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) \;\;, \quad (\delta\phi(x_\mu) = 0) \end{cases} \tag{5.3}$$

Avec a_μ représente le quadri-vecteur déplacement dans l'espace-temps.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (5.3),

$$\phi'(x'_\mu) = \phi'(x_\mu + a_\mu) = \phi(x_\mu) \tag{5.4}$$

donc,

$$\phi'(x_\mu + a_\mu) = \phi(x_\mu) \tag{5.5}$$

Transformation de phase globale $(\phi(x_\mu) \neq \phi^*(x_\mu))$

Cette transformation est donnée par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu \;\;, \quad (\delta x_\mu = 0) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{5.6}$$

Avec $\theta(x_\mu)$ est un scalaire réel.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (5.6),

$$\phi'(x'_\mu) = \phi'(x_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{5.7}$$

donc,

$$\phi'^*(x_\mu) = e^{+iq\theta(x_\mu)}\phi^*(x_\mu) \tag{5.8}$$

Transformation de phase locale $(\phi(x_\mu) = \phi^*(x_\mu))$

Cette transformation est donnée par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu \ , \quad (\delta x_\mu = 0) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{5.9}$$

Avec $\theta(x_\mu)$ est un scalaire réel.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (5.9),

$$\phi'(x'_\mu) = \phi'(x_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{5.10}$$

donc,

$$\phi'^*(x_\mu) = e^{+iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{5.11}$$

5.3.2 Théorème de Noether

Énoncé

Pour toute transformation continue de l'action S, il existe un courant J_μ vérifiant l'équation

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \tag{5.12}$$

Ceci implique qu'il existe une charge qui se conserve, définit par

$$Q = \int \rho \, d^3x \tag{5.13}$$

Démonstration

On dit que les équations de mouvement sont invariantes si l'action S est stationnaire

$$\delta S = S' - S \simeq 0 \tag{5.14}$$

On a

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \Rightarrow S' = \int d^4x' \, \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') \tag{5.15}$$

Avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ (la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de x_μ).
Considérons des transformations infinitésimales de la forme,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{5.16}$$

où

$$\delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) \tag{5.17}$$

Avec $\delta\phi(x_\mu)$ représente la variation du champ dû à la fois à la transformation du champ (variable) et la transformation de la coordonnées (x_μ).
Donc, la variation en un point fixe de l'espace à 4-dimensions est donnée par

$$\delta_o\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \ , \quad \text{pour } x' = x \tag{5.18}$$

Le lien entre les dérivées d'espace-temps est donné par

$$d^4x' = [1 + \partial_\mu(\delta x_\mu)]d^4x \tag{5.19}$$

Cherchons maintenant la relation entre la variation champ en deux points différents $\delta\phi$ et la variation du champ en un point fixe $\delta_o\phi$.
La variation du champ en deux point différents est donnée par

$$\delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) = \phi'(x') - \phi'(x) + \phi'(x) - \phi(x) \tag{5.20}$$

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu - \phi'(x) + \delta_o\phi(x) \tag{5.21}$$

Avec

$$\phi'(x') = \phi'(x_\mu + \delta x_\mu) = \phi'(x_\mu) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu = \phi'(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu \tag{5.22}$$

Donc,

$$\delta\phi(x) = \delta_o\phi(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu \tag{5.23}$$

Calculons le terme $\partial'_\mu\phi'$
On a

$$\partial'_\mu\phi'(x') = \partial'_\mu(\phi + \delta\phi) = \frac{\partial}{\partial x'_\mu}(\phi + \delta\phi) \tag{5.24}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}(\phi + \delta\phi) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\phi + \delta\phi)\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \tag{5.25}$$

On a aussi
$$x'_\nu = x_\nu + \delta x_\nu \Rightarrow x_\nu = x'_\nu - \delta x_\nu \tag{5.26}$$
Donc,
$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x'_\mu} + \frac{\partial}{\partial x'_\mu}(\delta x_\nu) \tag{5.27}$$
Finalement on trouve que,
$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{5.28}$$
En remplaçant l'équation (5.28) dans l'équation (5.24), on trouve
$$\partial'_\mu \phi'(x') = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\phi + \delta\phi)\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \tag{5.29}$$
$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\delta\phi)\right)(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu)) \tag{5.30}$$
$$= (\partial_\nu\phi + \partial_\nu(\delta\phi))(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu)) \tag{5.31}$$
$$= (\partial_\nu\phi)\delta_{\mu\nu} - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\nu(\delta\phi)\delta_{\mu\nu} - \partial_\nu(\delta\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{5.32}$$
$$\partial'_\mu\phi'(x') = (\partial_\mu\phi) - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\mu(\delta\phi) \tag{5.33}$$
On néglige le terme $\partial_\nu(\delta\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu)$, car c'est un terme d'ordre supérieur.
La densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de $x_\mu \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$
Donc
$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, (\partial_\mu\phi) - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\mu(\delta\phi)) \tag{5.34}$$
$$= \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}[\partial_\mu(\delta\phi) - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu)] \tag{5.35}$$
Donc, on trouve
$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{5.36}$$
En remplaçant l'équation (5.19) dans l'équation (5.14), on trouve
$$\delta S = \int d^4x'\, \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') - \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \simeq 0 \tag{5.37}$$
$$= \int [1 + \partial_\mu(\delta x_\mu)] d^4x\, \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') - \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \simeq 0 \tag{5.38}$$

$$\delta S = \int [\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \partial_\mu (\delta x_\mu) \mathcal{L}] d^4 x \simeq 0 \tag{5.39}$$

Calculons le terme: $\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu (\delta x_\nu) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu (\delta x_\nu) \tag{5.40}$$

D'après les équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

Donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \tag{5.41}$$

On a aussi

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi)$$

Donc,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi \tag{5.42}$$

En remplaçant les équations (5.41) et (5.42) dans l'équation (5.40), on trouve

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu (\delta x_\nu)$$

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu (\delta x_\nu) \tag{5.43}$$

On a

$$\delta\phi = \delta_o \phi + (\partial_\nu \phi) \delta x_\nu$$

Donc

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\delta_o \phi + (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu)) \right)$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right) \tag{5.44}$$

Calculons le terme $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right)$:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \left((\partial_\nu \phi) \right) (\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on trouve

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right) \tag{5.45}$$

Donc,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right) \tag{5.46}$$

En remplaçant l'équation (5.46) dans l'équation (5.43), on trouve

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu (\delta x_\nu)$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right)$$

Donc,

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu)$$

Calculons le terme $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu)$:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \delta x_\nu$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \partial x_\nu} \delta x_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta x_\nu = \partial_\mu \mathcal{L} \ \delta x_\mu$$

Finalement, on trouve

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \mathcal{L} \ \delta x_\mu \tag{5.47}$$

La variation de l'action dans l'équation (5.39) devient,

$$\delta S = \int \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi\right) + \partial_\mu \mathcal{L}\ \delta x_\mu + \partial_\mu(\delta x_\mu)\mathcal{L}\right] d^4x \simeq 0$$

On a

$$\partial_\mu \mathcal{L}\ \delta x_\mu + \partial_\mu(\delta x_\mu)\mathcal{L} = \partial_\mu(\mathcal{L}\,\delta x_\mu)$$

Alors,

$$\delta S = \int \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi\right) + \partial_\mu(\mathcal{L}\,\delta x_\mu)\right] d^4x \simeq 0$$

$$\delta S = \int \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi\right) + \mathcal{L}\,\delta x_\mu\right] d^4x \simeq 0$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi + \mathcal{L}\,\delta x_\mu\right] = 0$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme

$$\partial_\mu J_\mu = 0$$

Avec,

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi + \mathcal{L}\,\delta x_\mu \longrightarrow \text{Courant de Noether}$$

Exercice 7 :

1. Montrer que la densité lagrangienne du champ scalaire complexe libre est invariante dans la transformation de phase globale suivante,

$$\begin{cases} \phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{i\theta}\phi(x) \\ \phi^*(x) \longrightarrow \phi'^*(x) = e^{-i\theta}\phi^*(x) \end{cases}$$

   où θ est un réel indépendants de x_μ.

2. Quels sont les courant et charge qui se conservent?

Exercice 8 :

La dynamique d'un système composé d'un champ scalaire réel ϕ_1 et de deux champs scalaires complexes ϕ_2 et ϕ_3 est décrite par la densité lagrangienne,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2 - (\partial_\mu\phi_2^*)(\partial_\mu\phi_2) - m_2^2\phi_2^*\phi_2 - (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi_3^*(\partial_\mu - iqA_\mu)\phi_3 - m_3^2\phi_3^*\phi_3$$

où m_1, m_2 et m_3 sont des constantes.

1. Retrouvez les équations de mouvement?
2. Sachant que la densité lagrangienne est invariante dans les deux transformations de phases globales suivantes,

$$\begin{cases} \phi_1(x) \longrightarrow \phi_1'(x) = e^{-i\alpha_1}\phi_1(x) \\ \phi_1^*(x) \longrightarrow \phi_1'^*(x) = e^{i\alpha_1}\phi_1^*(x) \end{cases}, \begin{cases} \phi_2(x) \longrightarrow \phi_2'(x) = e^{+i\alpha_2}\phi_2(x) \\ \phi_2^*(x) \longrightarrow \phi_2'^*(x) = e^{-i\alpha_2}\phi_2^*(x) \end{cases}$$

   où α_1 et α_2 sont des réels indépendants de x.
   Quelles sont les courants et charges qui se conservent dans ces transformations ?

Solution 9:
1^o/ La dynamique d'un système est décrite par la densité lagrangienne,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\right)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2 - \left(\partial_\mu\phi_2\right)\left(\partial_\mu\phi_2^*\right) - m_2^2\phi_2\phi_2^* - \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\phi_3^*\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\phi_3 - m^2\phi_3\phi_3^*$$

Cette densité lagrangienne peut être écrite sous la forme suivante:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$$

<u>a°/</u>: Le champ scalaire réel est donné par la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L}_1(\phi_1, \partial_\mu\phi_1, x_\mu) = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\right)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2$$

<u>Équations du mouvement</u>: Remplaçons dans les équations d'Euler-Lagrange, avec $\phi_i = \phi_1 = \phi_1^*$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\phi_1} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\phi_1)}\right) = 0$$

Avec $\dfrac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\phi_1} = -m_1^2\phi_1$, $\quad \dfrac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\phi_1)} = -\partial_\mu\phi_1$.
En remplaçant on retrouve l'équation de Klein-Gordon,

$$\left(\partial_\mu\partial_\mu - m_1^2\right)\phi_1(x_\mu) = 0$$

<u>b°/</u>: Le champ scalaire complexe est donné par la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L}_2(\phi_2, \partial_\mu\phi_2, \phi_2^*, \partial_\mu\phi_2^*, x_\mu) = -\left(\partial_\mu\phi_2\right)\left(\partial_\mu\phi_2^*\right) - m_2^2\phi_2\phi_2^*$$

Équations du mouvement: Remplaçons dans les deux équations d'Euler-Lagrange pour $\phi_i = \phi_2, \phi_2^*$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \phi_2} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} \right) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \phi_2^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \phi_2^*)} \right) = 0$$

Avec $\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \phi_2^*} = -m_2^2 \phi_2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \phi_2^*)} = -\partial_\mu \phi_2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \phi_2} = -m_2^2 \phi_2^*, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} = -\partial_\mu \phi_2^*.$
En remplaçant dans l'équation (5.3.2), on retrouve les deux équations suivantes,

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu - m_2^2 \right) \phi_2(x_\mu) = 0 \ \ , \ \left(\partial_\mu \partial_\mu - m_2^2 \right) \phi_2^*(x_\mu) = 0$$

c°/: Le champ scalaire complexe en présence d'un champ électromagnétique extérieur est donné par la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L}_3(\phi_3, \partial_\mu \phi_3, \phi_3^*, \partial_\mu \phi_3^*, x_\mu) = -\left(\partial_\mu + iqA_\mu \right) \phi_3^* \left(\partial_\mu - iqA_\mu \right) \phi_3 - m^2 \phi_3 \phi_3^*$$

Équations du mouvement du champ ϕ_3:Remplaçons dans l'équation d'Euler-Lagrange pour $\phi_i = \phi_3^*$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \phi_3^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial(\partial_\mu \phi_3^*)} \right) = 0$$

On a

$$\mathcal{L}_3 = -\left(\partial_\mu \phi_3^* \right) \left(\partial_\mu - iqA_\mu \right) \phi_3 - iqA_\mu \phi_3^* \left(\partial_\mu - iqA_\mu \right) \phi_3 - m^2 \phi_3 \phi_3^*$$

Avec $\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \phi_3^*} = -iqA_\mu \left(\partial_\mu - iqA_\mu \right) \phi_3 - m_3^2 \phi_3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial(\partial_\mu \phi_3^*)} = -\left(\partial_\mu - iqA_\mu \right) \phi_3.$
En remplaçant dans l'équation (5.3.2), on retrouve les deux équations suivantes,

$$-iqA_\mu \left(\partial_\mu - iqA_\mu \right) \phi_3 - m_3^2 \phi_3 + \partial_\mu \left(\partial_\mu - iqA_\mu \right) \phi_3 = 0$$

$$\left[\left(\partial_\mu - iqA_\mu \right) \left(\partial_\mu - iqA_\mu \right) - m_3^2 \right] \phi_3(x_\mu) = 0$$

Équations du mouvement du champ ϕ_3^*:Remplaçons dans l'équation d'Euler-Lagrange pour $\phi_i = \phi_3$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \phi_3} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial(\partial_\mu \phi_3)} \right) = 0$$

$$\mathcal{L}_3 = -\left(\partial_\mu \phi_3 \right) \left(\partial_\mu + iqA_\mu \right) \phi_3^* + iqA_\mu \phi_3 \left(\partial_\mu + iqA_\mu \right) \phi_3^* - m^2 \phi_3 \phi_3^*$$

Avec $\dfrac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \phi_3} = iqA_\mu \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^* - m_3^2 \phi_3^*, \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial(\partial_\mu \phi_3)} = -\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^*.$
En remplaçant dans l'équation (5.3.2), on retrouve les deux équations suivantes,

$$iqA_\mu \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^* - m_3^2 \phi_3^* + \partial_\mu \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^* = 0$$

$$\left[\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) - m_3^2\right] \phi_3^*(x_\mu) = 0$$

2^o/ Retrouver les courants et charges associés aux deux transformations de phases globales:
D'après le Théorème de Noether,

$$\delta S = \int \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta_o \phi_i\right) + \mathcal{L}\, \delta x_\mu\right] d^4x \simeq 0$$

<u>a°/</u> Courant et charge associés au champ scalaire réel dans la transformation:

$$\begin{cases} \phi_1(x) \longrightarrow \phi_1^{'}(x) = e^{-i\alpha_1} \phi_1(x) \\ \phi_1^*(x) \longrightarrow \phi_1^{'*}(x) = e^{i\alpha_1} \phi_1^*(x) \end{cases}$$

α_1 est un réel indépendant de x.
En appliquant le théorème de Noether:

$$\delta S = \int \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \delta_o \phi_1 + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \phi_1^*)} \delta_o \phi_1^*\right) d^4x \simeq 0$$

Avec,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \phi_1^*)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} = -\partial_\mu \phi_1$$

$$\delta_o \phi_1 = \phi_1^{'} - \phi_1 = e^{-i\alpha_1}\phi_1 - \phi_1 = (e^{-i\alpha_1} - 1)\phi_1 = (1 - i\alpha_1 - 1)\phi_1 = -i\alpha_1 \phi_1 \quad \text{pour} \quad \alpha_1 << 1$$

Donc,

$$\delta S = \int \partial_\mu \left(-i(\partial_\mu \phi_1)\phi_1\right) \alpha_1 d^4x \simeq 0$$

$$\alpha_1 << 1 \Rightarrow \partial_\mu \left(-i(\partial_\mu \phi_1)\phi_1\right) = 0 \Rightarrow \partial_\mu J_\mu^1 = 0$$

Donc le courant du champ scalaire réel libre est donné par,

$$J_\mu^1 = -i(\partial_\mu \phi_1)\phi_1 = (j_i, \rho_1), \quad \text{avec} \quad \rho_1 = \frac{j_t}{i} = (-\partial_t \phi_1)\phi_1$$

La charge Q_1 associée à cette transformation est donnée par,

$$Q_1 = \int d^3x\rho_1 = \int d^3x\,(-\partial_t\phi_1)\phi_1$$

b°/ Courant et charge associés au champ scalaire complexe dans la transformation:

$$\begin{cases} \phi_2(x) \longrightarrow \phi_2^{'}(x) = e^{+i\alpha_2}\phi_2(x) \\ \phi_2^*(x) \longrightarrow \phi_2^{'*}(x) = e^{-i\alpha_2}\phi_2^*(x) \end{cases}$$

α_2 est un réel indépendant de x.
En appliquant le théorème de Noether:

$$\delta S = \int \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu\phi_2)}\delta_o\phi_2 \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu\phi_2^*)}\delta_o\phi_2^* \right) \right] d^4x \simeq 0$$

Avec,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu\phi_2)} = -\partial_\mu\phi_2^*,\ \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu\phi_2^*)} = -\partial_\mu\phi_2$$

$$\delta_o\phi_2 = \phi_2^{'} - \phi_2 = e^{i\alpha_2}\phi_2 - \phi_2 = (e^{i\alpha_2}-1)\phi_2 = (1+i\alpha_2-1)\phi_2 = i\alpha_2\phi_2 \ \text{ pour } \ \alpha_2 << 1$$

$$\delta_o\phi_2^* = \phi_2^{*'} - \phi_2^* = e^{-i\alpha_2}\phi_2^* - \phi_2^* = (e^{-i\alpha_2}-1)\phi_2^* = (1-i\alpha_2-1)\phi_2^* = -i\alpha_2\phi_2^* \ \text{ pour } \ \alpha_2 << 1$$

Donc,

$$\delta S = \int \partial_\mu \left(-i(\partial_\mu\phi_2^*)\phi_2 + i(\partial_\mu\phi_2)\phi_2^* \right) \alpha_2 d^4x \simeq 0$$

$$\alpha_2 << 1 \Rightarrow \partial_\mu \left(-i(\partial_\mu\phi_2^*)\phi_2 + i(\partial_\mu\phi_2)\phi_2^* \right) = 0 \Rightarrow \partial_\mu J_\mu^2 = 0$$

Donc le courant du champ scalaire réel libre est donné par,

$$J_\mu^2 = -i(\partial_\mu\phi_2^*)\phi_2 + i(\partial_\mu\phi_2)\phi_2^* = (j_i, \rho_2), \ \text{ avec } \ \rho_2 = \frac{j_t}{i} = -(\partial_t\phi_2^*)\phi_2 + (\partial_t\phi_2)\phi_2^*$$

La charge Q_1 associée à cette transformation est donnée par,

$$Q_2 = \int d^3x\rho_2 = \int d^3x\,((\partial_t\phi_2)\phi_2^* - (\partial_t\phi_2^*)\phi_2)$$

5.4 Tenseur Énergie-Impulsion du champ scalaire

Étant donner que densité lagrangienne $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du quadri-vecteur position x_μ, sa dérivée par rapport à x_μ est donnée par

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad \text{où} \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{5.48}$$

Donc,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \tag{5.49}$$

On a,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial x_\mu} \tag{5.50}$$

Or, d'après l'équation d'Euler-Lagrange on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right) \quad \text{pour} \qquad \mu = \nu \tag{5.51}$$

Donc,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right)\partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\partial_\mu \left(\partial_\nu \phi\right) \tag{5.52}$$

On pose,

$$\partial_\mu \left(\partial_\nu \phi\right) = \partial_\nu \left(\partial_\mu \phi\right) \tag{5.53}$$

On trouve,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right)\partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\partial_\nu \left(\partial_\mu \phi\right) = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\partial_\mu \phi\right) \tag{5.54}$$

Le terme $\partial_\mu \mathcal{L}$ peut être écrit aussi sous la forme:

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu} = \left(\partial_\nu \mathcal{L}\right)\delta_{\mu\nu} = \partial_\nu \left(\mathcal{L}\delta_{\mu\nu}\right) \tag{5.55}$$

Finalement, en comparant les équation (5.54) et (5.55), on trouve

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\partial_\mu \phi\right) = \partial_\nu \left(\mathcal{L}\delta_{\mu\nu}\right) \tag{5.56}$$

Donc,

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right) = 0 \tag{5.57}$$

Maintenant, si on remplace ν par μ

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right) = 0 \tag{5.58}$$

Cette dernière équation peut être réécrite sous la forme suivante,

$$\partial_{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0 \text{ avec } T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \tag{5.59}$$

Où $T_{\mu\nu}$ représente le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire.

5.5 Exercices d'application

Exercice 9 :

On définit dans l'espace des positions $\{|\overrightarrow{r}\rangle\}$ la transformation géométrique inversion de l'origine par:

$$\Pi\,|\overrightarrow{r}\rangle = |-\overrightarrow{r}\rangle\,,$$

Π représente l'opérateur parité.

1. Calculer $\Pi\,|\overrightarrow{p}\rangle$
2. Calculer $\Pi\,|\psi(t)\rangle$
3. On définit le transformé $\overrightarrow{A}'$ d'un opérateur $\overrightarrow{A}$ par $\overrightarrow{A}' \equiv \Pi\,\overrightarrow{A}\,\Pi^{-1}$. Calculer les transformés des opérateurs position, impulsion et moment cinétique donnés respectivement par $\overrightarrow{R}' \equiv \Pi\,\overrightarrow{R}\,\Pi^{-1}$, $\overrightarrow{P}' \equiv \Pi\,\overrightarrow{P}\,\Pi^{-1}$ et $\overrightarrow{L}' \equiv \Pi\,\overrightarrow{L}\,\Pi^{-1}$