

---

# Rappels de relativité restreinte

---

## 4.1 Rappel sur les lois de l'électromagnétisme

### 4.1.1 Équations de Maxwell

Les lois de l'électromagnétisme peuvent être exprimées

- Soit en fonction des champs électrique ( $\vec{E}$ ) et magnétique ( $\vec{B}$ ).
- Soit en fonction des potentiels scalaires ( $\vec{A}$ ) et scalaire ( $\phi$ ).

Maxwell a exprimé les lois de l'électromagnétisme sous la forme de quatre équations suivantes:

$$\text{div} \cdot \vec{D} = \rho \quad (4.1)$$

$$\text{div} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Les équations (4.1), (4.3), (4.4) représentent respectivement la loi de Gauss, la loi de Maxwell-Ampère et la loi de Lenz-Faraday.

- $\vec{D}$  est le vecteur déplacement électrique.
- $\vec{H}$  est le vecteur champ d'excitation.
- $\rho$  est une densité de charge électrique.
- $\vec{j}$  est un courant de charge électrique.

Ces vecteurs sont reliés aux champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  par les équations suivantes:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (4.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.6)$$

Où  $\epsilon$  est la permittivité diélectrique et  $\mu$  la perméabilité magnétique du milieu. Dans le vide, les équations (4.5) et (4.6) deviennent

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (4.7)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \implies \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (4.8)$$

Où  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont deux constantes données respectivement par:  $\epsilon_0 = 8.854 \text{ pF m}^{-1}$  et  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Henry/meter}$ .

En introduisant l'opérateur  $\vec{\nabla}$ , les équations précédentes deviennent:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (4.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.10)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.11)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.12)$$

En remplaçant les équations (4.7) et (4.8) dans les équations (4.9), (4.10), (4.11) et (4.12), on retrouve:

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.13)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.14)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}) \implies \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.15)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.16)$$

La force de Lorentz qui agit sur une particule de charge  $q$  et animée d'une vitesse  $\vec{V}$  est donnée par

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (4.17)$$

L'équation de conservation de la charge est donnée par,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.18)$$

**Ramarque:**

- Les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge électrique sont valables en tout points du milieu et à tout instants. Elles sont, donc, des équations locales.

### 4.1.2 Potentiels vecteur et scalaire

Les champs magnétique  $\vec{B}$  et électrique  $\vec{E}$  dérivent des potentiels de Lorentz  $\vec{A}$  et  $\phi$ , où

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.19)$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \quad (4.20)$$

Ces dernières équations peuvent être réécrites en fonction de  $\vec{\nabla}$ ,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.21)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (4.22)$$

**Ramarque:**

Dans le vide, les potentiels vecteurs  $\vec{A}$  et scalaire  $\phi$  vérifient l'équation suivante:

$$div \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.23)$$

Cette équation est appelée "Jauge de Lorentz". Cette équation peut être écrite en fonction de  $\vec{\nabla}$ ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.24)$$

On a,

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \implies c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (4.25)$$

En utilisant les équations de Maxwell et de la jauge de Lorentz, on obtient:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.26)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.27)$$

La résolution des ces deux équations permet d'avoir les valeurs des potentiels  $\phi$  et  $\vec{A}$ .

## 4.2 Analyse vectorielle dans l'espace de Minkowski

On introduit dans l'espace à quatre dimensions de Minkowski, l'opérateur "quadi-nabla", qu'on définit de la façon suivante:

$$\vec{\partial} = \left( \vec{\nabla}, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (4.28)$$

de composantes,

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \partial_4 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.29)$$

### 4.2.1 Quadri-divergence et quadri-gradient

Soit le quadri-vecteur  $\vec{A}$ , de composantes:

$$\vec{A} = (a_x, a_y, a_z, a_4) = (\vec{a}, a_4) \quad \text{où} \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad (4.30)$$

La métrique de l'espace de Minkowski est donnée par  $(+, +, +, -)$ . Donc, le produit scalaire de deux quadri-vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est donné par

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \\ b_4 \end{pmatrix} = +a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z - a_4 b_4 \quad (4.31)$$

La quadri-divergence d'un quadri-vecteur  $\vec{V}$  est donnée par

$$\vec{\partial} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_4 \end{pmatrix} = +\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial v_4}{\partial t} \quad (4.32)$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme,

$$\vec{\partial} \cdot \vec{V} = \left( \vec{\partial}, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot (\vec{v}, v_4) = \left( \vec{\partial} \vec{v}, -\frac{1}{c} \frac{\partial v_4}{\partial t} \right) \quad (4.33)$$

De la même façon on définit le quadri-gradient d'une fonction scalaire  $\phi$  par,

$$\vec{\partial} \phi = \left( \vec{\partial} \phi, -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (4.34)$$

## 4.2.2 Quadri-vecteur densité de courant

L'équation (4.18) exprime le principe de conservation de la charge. Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \implies \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (c\rho) = 0 \quad (4.35)$$

qu'en peut écrire sous la forme:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} - \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) (c\rho) = 0 \implies \left( \vec{\partial} \vec{j}, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c) \right) = 0 \quad (4.36)$$

Cette équation apparait comme la quadri-divergence d'un quadri-vecteur

$$\left( \vec{\partial}, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\vec{j}, \rho c) = 0 \implies \vec{\partial} \vec{J} = 0 \quad (4.37)$$

L'équation (4.37) représente l'écriture de l'équation de conservation de la charge dans l'espace de Minkowski et le quadri-vecteur courant est donné par,

$$\vec{J} = (\vec{j}, \rho c) \quad (4.38)$$

### 4.2.3 Quadri-vecteur potentiel

La jauge de Lorentz donnée dans l'équation (4.24) peut être réécrite comme suit,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{c} \right) = 0 \quad (4.39)$$

qu'en peut écrire sous la forme:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\phi}{c} \right) = 0 \implies \left( \vec{\partial} \vec{A}, -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.40)$$

Cette équation apparait comme la quadri-divergence d'un quadri-vecteur

$$\left( \vec{\partial}, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \vec{A}, \frac{\phi}{c} \right) = 0 \implies \vec{\partial} \vec{A} = 0 \quad (4.41)$$

L'équation (4.41) représente l'écriture de la jauge de Lorentz dans l'espace de Minkowski et le quadri-vecteur potentiel est donné par,

$$\vec{A} = \left( \vec{A}, \frac{\phi}{c} \right) \quad (4.42)$$

### 4.2.4 Tenseur champ électromagnétique

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont donnés en fonction des potentiels  $\phi$  et  $\vec{A}$  par les deux équations (4.21) et (4.22).

L'écriture de l'équation (4.21) dans l'espace à trois dimensions donne:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \implies \quad (4.43)$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (4.44)$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \quad (4.45)$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (4.46)$$

Ces dernières équations peuvent être réécrites sous la forme suivante:

$$E_x = -c \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi}{c} \right) - c \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (4.47)$$

$$E_y = -c \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi}{c} \right) - c \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \quad (4.48)$$

$$E_z = -c \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\phi}{c} \right) - c \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (4.49)$$

Maintenant, en prenant  $c$  en facteur, on retrouve:

$$\frac{E_x}{c} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (4.50)$$

$$\frac{E_y}{c} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \quad (4.51)$$

$$\frac{E_z}{c} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (4.52)$$

L'écriture de l'équation (4.22) dans l'espace à trois dimensions donne:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \implies \quad (4.53)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (4.54)$$

$$B_y = - \left[ \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right] \implies B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (4.55)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (4.56)$$

### 4.2.5 Changement de variable

Un point de l'espace de Minkowski est représenté par le quadri-vecteur position

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -ct \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Faisons les changement des variables suivant:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = x_3 \\ -ct = x_4 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_3} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_4} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \partial_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = \partial_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = \partial_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_4} = \partial_4 \end{cases} \quad (4.58)$$

$$\begin{cases} A_x = A_1 \\ A_y = A_2 \\ A_z = A_3 \\ \frac{\phi}{c} = A_4 \end{cases} \quad (4.59)$$

Les équations (4.50), (4.51), (4.52), (4.54), (4.55) et (4.56) deviennent,

$$\frac{E_x}{c} = -\partial_1 A_4 + \partial_4 A_1 \quad (4.60)$$

$$\frac{E_y}{c} = -\partial_2 A_4 + \partial_4 A_2 \quad (4.61)$$

$$\frac{E_z}{c} = -\partial_3 A_4 + \partial_4 A_3 \quad (4.62)$$

$$B_x = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \quad (4.63)$$

$$B_y = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \quad (4.64)$$

$$B_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \quad (4.65)$$

Ces six équations peuvent être écrite sous la forme générale suivante

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \quad (4.66)$$

Où les coefficients  $F_{\mu\nu}$  sont les éléments de matrice d'un tenseur de l'espace de Minkowski, appelé "Tenseur champ électromagnétique" et donné par,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

Le tenseur est antisymétrique  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  et  $F^{\mu\mu} = 0$ . Donc, les éléments de matrice du tenseur champ électromagnétique sont donnés par,

$$\frac{E_x}{c} = -\partial_1 A_4 + \partial_4 A_1 = F_{41} = -F_{14} \quad (4.68)$$

$$\frac{E_y}{c} = -\partial_2 A_4 + \partial_4 A_2 = F_{42} = -F_{24} \quad (4.69)$$

$$\frac{E_z}{c} = -\partial_3 A_4 + \partial_4 A_3 = F_{43} = -F_{34} \quad (4.70)$$

$$B_x = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = F_{23} = -F_{32} \quad (4.71)$$

$$B_y = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = F_{31} = -F_{13} \quad (4.72)$$

$$B_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = F_{12} = -F_{21} \quad (4.73)$$

Finalement, le tenseur champ électromagnétique est donné par,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

### 4.3 Exercices d'application

#### Exercice 5 :

Les champs électrique et magnétique  $\vec{E}_1$  et  $\vec{B}_1$ , mesurés par un observateur  $\mathbf{O}$  lié à un repère Galiléen  $\mathbf{R}$ , sont donnés en fonction des potentiels scalaire et vecteur  $\phi_1, \vec{A}_1$  par les équations

$$\vec{E}_1 = -\vec{\text{grad}} \phi_1 - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t}, \quad \vec{B}_1 = \vec{\text{rot}} \vec{A}_1$$

1. Donner l'expression des composantes des champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{B}_1$  dans le repère  $\mathbf{R}$ .
2. Retrouver les composantes du tenseur électromagnétique.
3. Quelle sont les nouvelles valeurs des champs  $\vec{E}'_1$  et  $\vec{B}'_1$ , mesurées par un observateur  $\mathbf{O}'$  lié à un repère Galiléen  $\mathbf{R}'$  en déplacement à une vitesse constante  $\vec{v}$  par rapport à  $\mathbf{R}$  ?

#### Exercice 6 :

- Trouver le courant de probabilité de l'équation de Schrodinger  $\vec{j}$  qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

On donne :  $\rho = \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)$