Équation de Dirac

7.1 Introduction

Nous allons maintenant essayer de construire une théorie relativiste des particules ayant des spin non nuls. Nous nous placerons, en premier lieu, dans une situation où le champ électromagnétique n'est pas pris en considération.
Pour obtenir un modèle satisfaisant, il faudra que le vecteur d'état ψ soit soumis à une équation généralisant celles de Schrödinger (qui ne tient pas compte des phénomènes relativistes) et de Klein-Gordon (qui ne tient pas compte du spin) et qui devra avoir deux propriétés principales:

1. elle devra être invariante sous l'action du groupe de Lorentz,
2. elle devra être d'ordre un en t et plus précisément de la forme

$$i\hbar\partial_t\psi = H_D\psi \tag{7.1}$$

   où H_D est un opérateur. La démonstration est la même que celle utilisée pour obtenir l'équation de Klein-Gordon.

7.2 Les insuffisances de l'équation de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon est insatisfaisante en raison de l'existence de solutions d'énergie négative. C'est ce, d'ailleurs, a conduit Dirac à postuler l'existence du "positron", particule analogue à l'électron mais chargée positivement.
Avant de regarder les conséquences physiques d'énergies négatives, il faut d'abord mettre au point la théorie. Faisons ce qui est habituel quand on regarde une équation aux dérivées ordinaires d'ordre deux qu'on voudrait ramener à premier ordre (en t seulement).
On définit le vecteur

$$\phi = \begin{pmatrix} \psi \\ \partial_t\psi \end{pmatrix}.$$

On est ramenés à l'équation d'ordre 1 suivante:

$$\partial_t \phi = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Delta + \frac{m^2}{\hbar^2} & 0 \end{pmatrix} \phi.$$

En fait, il sera plus commode de poser

$$\phi_1 = \psi + \frac{i\hbar}{m}\partial_t \psi \ \text{ et } \phi_2 = \psi - \frac{i\hbar}{m}\partial_t \psi \tag{7.2}$$

et de remarquer que la fonction d'onde définie par $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ vérifie l'équation suivante

$$\partial_t \Phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{i\hbar}{m}\Delta & \frac{i\hbar}{m}\Delta + \frac{2im}{\hbar} \\ -\frac{i\hbar}{m}\Delta - \frac{2im}{\hbar} & -\frac{i\hbar}{m}\Delta \end{pmatrix} \Phi. \tag{7.3}$$

Si la vitesse de la particule est petite devant la vitesse de la lumière, nous pouvons négliger son énergie cinétique devant son énergie interne et donc l'énergie totale est égale à $E \simeq mc^2 = m^2$. Cette égalité se traduit en terme d'observables par $i\hbar\partial_t \psi = m\psi$ et donc pour des situations non-relativistes, $\phi_2 \simeq 0$. En prenant $\phi_2 = 0$ et en regardant la première coordonnée dans (7.3), on obtient

$$\partial_t \phi_1 = \frac{i\hbar}{2m}\Delta\phi_1.$$

Autrement dit, on retrouve l'équation de Schrödinger non-relativiste.

7.3 Hamiltonien de Dirac

Afin d'éviter de travailler avec des particules ayant des énergies négatives, comme c'était le cas pour l'hamiltonien (l'énergie totale) à partir duquel on a pu avoir l'équation de Klein-Gordon pour une particule libre, Paul Dirac proposa en 1928 d'écrire la forme générale de l'hamiltonien sous la forme suivante:

$$H_{Dirac} = \overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p}\,c + \beta\, mc^2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i.p_i c + \beta\, mc^2 = \alpha_i.p_i c + \beta\, mc^2 \tag{7.4}$$

où les coefficients β et α_i sont des constantes qui ne commutent pas.
- Cherchons les valeurs de ces deux constantes.

En Calculant le carré de l'hamiltonien de Dirac H^2_{Dirac}, on retrouve l'expression suivante

$$H^2 = \left(\alpha_i.p_i c + \beta\, mc^2\right)\left(\alpha_j.p_j c + \beta\, mc^2\right) = \overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \tag{7.5}$$

$$H^2 = p_i p_j \alpha_i \alpha_j c^2 + \beta^2 mc^2 c^4 + mc^3 p_i \left(\beta\alpha_j + \alpha_j\beta\right) = \overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \tag{7.6}$$

- On remarque par comparaison que

$$\beta^2 = 1 \Longrightarrow \beta\beta^{-1} = 1 \Longrightarrow \beta = \beta^{-1} \tag{7.7}$$

$$\beta\alpha_j + \alpha_j\beta = 0 \tag{7.8}$$

$$p_i p_j \alpha_i \alpha_j = p^2 \tag{7.9}$$

Pour $i = j = 1, 2, 3$ on trouve:

$$p_i p_j \alpha_i \alpha_j = p_1^2 \alpha_1^2 + p_2^2 \alpha_2^2 + p_1 p_2 \left(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1\right) + p_1 p_3 \left(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1\right) + p_2 p_3 \left(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2\right) \tag{7.10}$$

$$p_i p_j \alpha_i \alpha_j = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \tag{7.11}$$

Pour (7.10) soit égale à (7.11), il faut que

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1 & (7.12)\\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 &= \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = 0 & (7.13) \end{aligned}$$

Donc, si on pose $\alpha_i^2 = 1$ où $i = 1, 2, 3$ alors

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \tag{7.14}$$

où $\{A, B\} = AB + BA$ est l'anticommutateur des deux grandeurs A et B.
Finalement les constantes sans dimensions α_i et β vérifient les relation d'anti-commutation suivantes

$$\begin{aligned} \beta^2 &= 1 & (7.15)\\ \{\beta, \alpha_i\} &= 0 & (7.16)\\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 2\delta_{ij} & (7.17)\\ \alpha_i^2 &= 1 & (7.18)\\ & & (7.19) \end{aligned}$$

Donc,

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1, \tag{7.20}$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{\alpha_1, \alpha_3\} = \{\alpha_2, \alpha_3\} = \{\beta, \alpha_1\} = \{\beta, \alpha_2\} = \{\beta, \alpha_3\} = 0, \tag{7.21}$$

7.4 Les propriétés des matrices de Dirac

Avant d'écrire l'équation de Dirac décrivant des particules de spin non nul, il est utile de déterminer l'ordre des matrices figurant dans l'expression de l'hamiltonien de Dirac. La détermination de l'ordre des matrices β et α_i va permettre de déduire le nombre de composantes du spineur décrivant l'état d'une telle particule, dans le cas relativiste. Pour ce faire:

1. On détermine les valeurs propres des matrices $\beta\,, \alpha_i : i = 1, 2, 3$.
   L'équation aux valeurs propres, relative à β (respectivement des α_i) s'écrit sous forme

   $$\beta \overrightarrow{X} = \lambda \overrightarrow{X}.$$

   Une deuxième application de β (respectivement des α_i) donne, en tenant compte de (**??**):

   $$\begin{array}{rcl} \beta^2 \overrightarrow{X} = \lambda\, \beta \overrightarrow{X} & \Rightarrow & 1. \overrightarrow{X} = \lambda^2 \overrightarrow{X} \\ \lambda^2 = 1 & \Rightarrow & \lambda = \pm 1. \end{array}$$

   Ainsi, les valeurs propres des matrices β et α_i sont $+1$ ou -1.

2. On montre ensuite que les traces $Tr(\beta) = Tr(\alpha_i) = 0$. Pour ce faire, on va utiliser, d'une part l'anticommutation des matrices en question, et d'autre part, les propriétés, bien connues

   $$\begin{array}{r} Tr(A\,B) = Tr(B\,A), \\ Tr(\lambda\,A) = \lambda\,Tr(A). \end{array} \tag{7.22}$$

   En effet,

   $$\begin{array}{rcl} Tr(\alpha_i) & = & Tr(1.\alpha_i) = Tr(\beta^2\,\alpha_i) = Tr\big[\beta(\beta\,\alpha_i)\big] = Tr\big[\beta(-\alpha_i\,\beta)\big] \\ & = & -Tr\big[\beta(\alpha_i\,\beta)\big] = -Tr\big[(\alpha_i\,\beta)\beta\big] = -Tr\big[\alpha_i\,\beta^2\big] \\ & = & -Tr(\alpha_i) \\ & \Rightarrow & \qquad Tr(\alpha_i) = 0. \end{array} \tag{7.23}$$

Une démonstration similaire peut se faire pour montrer que $Tr(\beta) = 0$.

3. On va exploiter, d'une part, le fait que les matrices hermitiennes M sont diagonalisables, c'est-à-dire il existe une matrice inversible S, telle que

$$S\,M\,S^{-1} = M_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_i & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{7.24}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de M. D'autre part, l'égalité des traces des deux matrices M et M_D est également exploitée. En effet,

$$Tr(M) = Tr\big[S^{-1}(M_D S)\big] = Tr\big[(M_D S)S^{-1}\big] = Tr(M_D) \tag{7.25}$$

Comme les matrices β et α_i sont hermitiennes, alors il est possible d'utiliser les propriétés précédentes, qui s'écrivent dans le cas de β et α_i comme suit

$$\begin{aligned} Tr(\beta) = Tr(\alpha_i) = 0 \qquad & \Rightarrow \qquad Tr(\beta_D) = Tr\big[(\alpha_i)_D\big] = 0 \\ & \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \\ & \Rightarrow \qquad \underbrace{(1+1-1+..-1+1)}_{\text{n termes}} = 0. \end{aligned}$$

Pour avoir une somme nulle, il faut que les $+1$ et les -1 se compensent complètement, condition qui n'a lieu que si la dimension des matrices $\beta_D, (\alpha_i)_D$, ou encore (β et α_i), est paire, i.e. $n = 2p$.

Pour $n = 2$, une base des matrices complexes $M_{2\times 2}$ est l'ensemble des matrices de Pauli, en plus de l'identité $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 1\}$. Dans ce cas, il n'y a pas de solution, car confondre les α_i avec les σ_i, conduit à prendre nécessairement $\beta = 1$. Or β possède une trace différente de 1 ($Tr(1) = 2$), ce qui est absurde.

Pour $n = 4$, il existe des solutions. Celles-ci s'écrivent en représentation standard sous la forme

$$\overrightarrow{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{\sigma} \\ \overrightarrow{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{7.26}$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice identité (2×2) et $\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{e_1}\ \sigma_1 + \overrightarrow{e_2}\ \sigma_2 + \overrightarrow{e_3}\ \sigma_3$. Les 3 matrices de Pauli sont définies par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.27}$$

Finalement, on peut conclure que les matrices β et α_i, figurant dans l'hamiltonien de Dirac, sont d'ordre 4×4. Ainsi, la fonction d'onde, décrivant l'état d'une particule de spin non nul, est un spineur à 4 composantes. Ce spineur permet de décrire, aussi bien, la particule que l'antiparticule de spin non nul. En représentation standard, il est d'usage d'utiliser la notation condensée suivante

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{7.28}$$

où φ et χ sont deux spineurs à deux composantes, décrivant respectivement la particule et l'antiparticule.

7.5 Représentation standard

L'écriture des matrices de Dirac dans la représentation standard est donnée par

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & \mathbb{O} \end{pmatrix} \tag{7.29}$$

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{7.30}$$

où σ_k sont les matrices de Pauli (matrices 2×2), données par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

et

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matrice unitaire}, \qquad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.32}$$

Exercice 19 :

1. Donner la forme explicite des matrices de Dirac suivantes: γ^1, γ^2, γ^3 et γ^4.
2. Montrer que

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu, \quad (\gamma^\mu)^1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{7.33}$$

Solution 20:

1^o/ Les quatre matrices de Dirac sont données par,

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.34}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.35}$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.36}$$

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.37}$$

$2^o/a/$ Montrer que:

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu, \quad \text{où} \quad \text{si} \quad A = a_{ij} \quad \text{alors} \quad A^+ = a^*_{ji} \tag{7.38}$$

- Pour $\mu = 1$

$$\left(\gamma^1\right)^+ = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^1 \tag{7.39}$$

- Pour $\mu = 2$

$$\left(\gamma^2\right)^+ = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^2 \tag{7.40}$$

- Pour $\mu = 3$

$$\left(\gamma^3\right)^+ = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^3 \tag{7.41}$$

- Pour $\mu = 4$

$$\left(\gamma^4\right)^+ = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \gamma^4 \tag{7.42}$$

Donc, $(\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu$.

$2^o/b/$ Montrer que:

$$(\gamma^\mu)^2 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.43}$$

- Pour $\mu = 1$

$$\left(\gamma^1\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{7.44}$$

- Pour $\mu = 2$

$$\left(\gamma^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{7.45}$$

- Pour $\mu = 3$

$$\left(\gamma^3\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{7.46}$$

- Pour $\mu = 4$

$$\left(\gamma^4\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{7.47}$$

Donc $(\gamma^\mu)^2 = 1$.
$2^o/c/$ Montrer que:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{7.48}$$

- Pour $\mu = \nu = 1$

$$\{\gamma^1, \gamma^1\} = \gamma^1\gamma^1 + \gamma^1\gamma^1 = 2\left(\gamma^1\right)^2 = 2\delta_{11} = 2 \tag{7.49}$$

- Pour $\mu = 1, \nu = 2$

$$\{\gamma^1, \gamma^2\} = \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1 = 2\delta_{12} = 0 \tag{7.50}$$

Vérification:

$$\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \tag{7.51}$$

$$\gamma^2\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{7.52}$$

Donc,

$$\{\gamma^1, \gamma^2\} = \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.53}$$

Donc,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \quad \text{lorsque} \quad \mu = \nu, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0 \quad \text{lorsque} \quad \mu \neq \nu \tag{7.54}$$

7.6 Équation de Dirac libre

On va essayer dans ce qui suit de retrouver l'équation de Dirac, à partir de l'équation d'évolution de Schrodinger,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_{Shrodinger}\psi, \quad \text{avec} \qquad H_{Shrodinger} = -\frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla}^2 \tag{7.55}$$

L'hamiltonien de Dirac étant donné par,

$$H_{Dirac} = \alpha_i . p_i c + \beta\, mc^2 \tag{7.56}$$

et

$$\overrightarrow{p} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla} = -i\hbar\overrightarrow{\partial} = -i\,\hbar\,\partial_i \tag{7.57}$$

On a aussi

$$\partial_4 = \frac{-i}{c}\frac{\partial}{\partial t} \Longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t} = -c\,\partial_4 \tag{7.58}$$

En remplaçant dans (7.55), on obtient

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\alpha_i.p_i c + \beta\, mc^2\right)\psi \Longrightarrow -c\,\hbar\,\partial_4\psi = \left(-i\,\hbar\,\alpha_i\,\partial_i\,c + \beta\,mc^2\right)\psi \tag{7.59}$$

Si on devise les deux membres de l'équation (7.59) par c, on obtient

$$-\hbar\,\partial_4\psi = (-i\,\hbar\,\alpha_i\,\partial_i + \beta\,m\,c)\,\psi \tag{7.60}$$

Maintenant, si on devise les deux membres de l'équation (7.60) par β, on obtient

$$-\beta\,\hbar\,\partial_4\psi = (-i\,\beta\,\hbar\,\alpha_i\,\partial_i + m\,c)\,\psi \text{avec} \quad \beta = \beta^{-1} \tag{7.61}$$

$$\left(\partial_4\,\beta + \partial_i\,(-i\,\beta\,\alpha_i) + \frac{m\,c}{\hbar}\right)\psi = 0 \tag{7.62}$$

$$\left(\partial_4\,\gamma^4 + \partial_i\,\gamma^i + \frac{m\,c}{\hbar}\right)\psi = 0 \tag{7.63}$$

Avec

$$\gamma^4 = \beta \tag{7.64}$$

$$\gamma^i = -i\,\beta\,\alpha_i \tag{7.65}$$

Finalement, on trouve

$$\left(\partial_4\,\gamma^4 + \partial_i\,\gamma^i + m\right)\psi = 0 \quad \text{avec} \quad \hbar = c = 1 \tag{7.66}$$

En utilisant l'expression des deux quadr-vecteurs

$$\partial_\mu = (\partial_i, \partial_4) \tag{7.67}$$

$$\gamma^\mu = \left(\gamma^i, \gamma^4\right) \tag{7.68}$$

où

$$(\partial_i, \partial_4)\cdot\left(\gamma^i, \gamma^4\right) = \partial_4\,\gamma^4 + \partial_i\,\gamma^i \tag{7.69}$$

L'équation peut être réécrite comme suit

$$\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu + m\,\right)\psi = 0 \tag{7.70}$$

Cette dernière équation représente l'équation de Dirac pour une particule libre.
Si on pose

$$\partial\!\!\!/ = \partial_\mu \, \gamma^\mu \tag{7.71}$$

On obtient

$$(\, \partial\!\!\!/ + m \,)\, \psi(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \text{spineur de dirac} \tag{7.72}$$

Donc les matrices de Dirac possèdent les propriétés suivantes: pour $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu \tag{7.73}$$

$$(\gamma^\mu)^2 = 1 \tag{7.74}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{7.75}$$

7.7 Interprétation physique des énergies négatives

L'intérêt de travailler avec des vecteurs à composantes (spineurs) réside dans le fait que pour des fermions (électrons), deux composantes du spineurs de Dirac permettent de décrire les deux états ($\pm\frac{1}{2}$) du spin de la particule ayant une énergie ($\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$). Les deux autres composantes du spineur permettent de décrire l'état du spin de l'anti-particule ayant une énergie ($-\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$).
L'anti-particule traduit tout simplement l'absence de matière (trou).
Exemple: Si une particule passe d'un niveau d'énergie bas à un niveau d'énergie plus haut. Le vide laissé par la particule (trou) est interprété comme étant l'anti-particule d'énergie ($E = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$), appelée aussi positron. Un positron possède en fait la même masse que l'électron et une charge positive ($+q$).

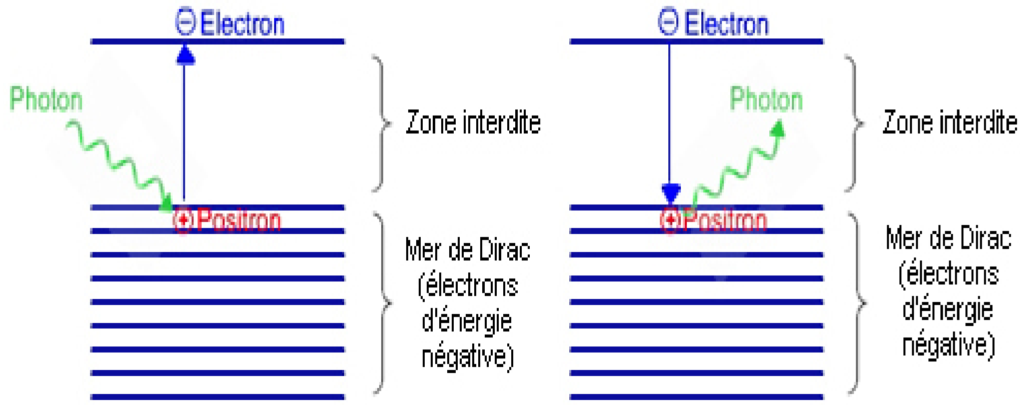

Figure 7.1: Schéma de la mer de Dirac.

Lorsque un électron revient à son état initial, il libère un photon d'énergie ($h\nu$)

$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma \tag{7.76}$$

Ce processus est appelé phénomène d'annihilation. Ce phénomène peut être rencontré dans les accélérateurs de particules, où des électrons et des positrons sont accélérés à des vitesses proches de la vitesse de la lumière, puis on les fait rentrés en collision pour donner naissance à de nouvelles particules (pions, mésons, $\cdots$) ayant des durées de vies infiniment petite

7.8 Courant de l'équation de Dirac libre

Cherchons l'expression du courant associé à l'équation de Dirac, vérifiant l'équation de continuité donnée par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} = 0 \Longrightarrow \partial_\mu J_\mu = 0 \quad \text{avec} \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \tag{7.77}$$

On a aussi l'équation de Dirac est donnée par

$$(\not{\partial} + m)\,\psi(x) = 0 \Longrightarrow (\partial_\mu \gamma^\mu + m)\,\psi(x) = 0 \tag{7.78}$$

- Calculons le conjugué de l'équation de Dirac, on trouve

$$\left[(\partial_\mu\,\gamma^\mu + m\,)\,\psi(x)\right]^* = 0 \Longrightarrow \psi^+(x)\left(\partial_\mu^*\,\left(\gamma^\mu\right)^+ + m\right) = 0 \tag{7.79}$$

On a

$$\partial_\mu = (\partial_i, \partial_4) \Longrightarrow \partial_\mu^* = (\partial_i^*, \partial_4^*) \tag{7.80}$$

avec

$$\partial_i^* = \partial_i, \quad \partial_4^* = -\partial_4 \tag{7.81}$$

Donc

$$\partial_\mu^* = (\partial_i, -\partial_4) \tag{7.82}$$

et

$$\gamma^\mu = \left(\gamma^i, \gamma^4\right) \Longrightarrow \left(\gamma^\mu\right)^+ = \gamma^\mu = \left(\gamma^i, \gamma^4\right) \tag{7.83}$$

Alors,

$$\partial_\mu^*\,\left(\gamma^\mu\right)^+ = \partial_i\,\gamma^i - \partial_4\,\gamma^4 \tag{7.84}$$

En remplaçant (7.84) dans (7.79) on trouve,

$$\psi^+(x)\left(\partial_i\,\gamma^i - \partial_4\,\gamma^4 + m\right) = 0 \tag{7.85}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (7.85) par (γ^4), on trouve

$$\left[\psi^+(x)\left(\partial_\mu^*\,\left(\gamma^\mu\right)^+ + m\right) = 0\right] \times \gamma^4 \tag{7.86}$$

$$\psi^+(x)\left(\partial_i\,\gamma^i\gamma^4 - \partial_4\,\gamma^4\gamma^4 + m\,\gamma^4\right) = 0 \tag{7.87}$$

Or

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\delta_{\mu\nu} \Longrightarrow \{\gamma^1, \gamma^4\} = \gamma^1\gamma^4 + \gamma^4\gamma^1 = 0 \Longrightarrow \gamma^1\gamma^4 = -\gamma^4\gamma^1 \tag{7.88}$$

Donc,

$$\psi^+\left(-\gamma^4\,\partial_i\,\gamma^i - \gamma^4\,\partial_4\,\gamma^4 + \gamma^4\,m\right) = 0 \Longrightarrow \tag{7.89}$$

$$\psi^+\,\gamma^4\left(-\partial_i\,\gamma^i - \partial_4\,\gamma^4 + m\right) = 0 \Longrightarrow \psi^+\,\gamma^4\left(-\partial_\mu\,\gamma^\mu + m\right) = 0 \tag{7.90}$$

Si on pose $\overline{\psi} = \psi^+\,\gamma^4$, l'équation adjointe de l'équation de Dirac libre devient

$$\overline{\psi}\left(-\partial_\mu\,\gamma^\mu + m\right) = 0 \Longrightarrow \overline{\psi}\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu - m\right) = 0 \tag{7.91}$$

qu'on peut écrire sous la forme finale suivante,

$$\overline{\psi}\left(\overleftarrow{\not\partial} - m\right) = 0 \tag{7.92}$$

Maintenant en multipliant l'équation (7.78) par $\overline{\psi}$ et l'équation (7.92) par ψ on trouve

$$\overline{\psi}\left(\partial_\mu \gamma^\mu + m\right)\psi = 0 \tag{7.93}$$

$$\overline{\psi}\left(\partial_\mu \gamma^\mu - m\right)\psi = 0 \tag{7.94}$$

En calculant la somme des deux équations (7.93) (7.94) on trouve,

$$\overline{\psi}\left(\partial_\mu \gamma^\mu + m\right)\psi + \overline{\psi}\left(\partial_\mu \gamma^\mu - m\right)\psi = 0 \Longrightarrow \tag{7.95}$$

$$\overline{\psi}\,\overleftarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu \psi + m\overline{\psi}\,\psi + \overline{\psi}\,\overrightarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu \psi - m\overline{\psi}\psi = 0 \Longrightarrow \tag{7.96}$$

$$\partial_\mu\left(\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\right) = 0 \Longrightarrow \partial_\mu J^{Dirac}_\mu = 0 \tag{7.97}$$

avec

$$J^{Dirac} = k\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi = i\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi \quad avec \quad k = i \tag{7.98}$$

7.8.1 Vecteur impulsion- charge totale

Calculons les expressions des composantes du vecteur impulsion de j_4 et j_i

$$J_4 = i\,\overline{\psi}\,\gamma^4\,\psi = i\,\psi^+\,\gamma^4\,\gamma^4\,\psi = i\,\psi^+\,\psi = \rho \tag{7.99}$$

$$J_i = i\,\overline{\psi}\,\gamma^i\,\psi = i\,\psi^+\,\gamma^4\,\gamma^i\,\psi \tag{7.100}$$

Or

$$\gamma^i = -i\,\beta\,\alpha_i, \quad \beta = \gamma^4 \Longrightarrow \gamma^i = -i\,\gamma^4\,\alpha_i \Longrightarrow \tag{7.101}$$

$$\gamma^4\,\gamma^i = -i\,\gamma^4\,\gamma^4\,\alpha_i \Longrightarrow \alpha_i = i\,\gamma^4\,\gamma^i \tag{7.102}$$

Donc

$$J_i = \psi^+\,\alpha_i\,\psi \Longrightarrow \overrightarrow{J} = \psi^+\,\overrightarrow{\alpha}\,\psi \tag{7.103}$$

Finalement, la charge totale est donnée par

$$Q = \int d^3x\,\rho = i\int d^3x\,\psi^+\,\psi \tag{7.104}$$

7.9 Équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Afin de retrouver l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ, on utilise la méthode du couplage minimal

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - iqA_\mu \tag{7.105}$$

$$(\not{\partial} + m)\,\psi(x) = 0 \Longrightarrow (\partial_\mu \gamma^\mu + m)\,\psi(x) = 0 \tag{7.106}$$

En remplaçant (7.105) dans (7.106) on trouve,

$$\left((\partial_\mu - iqA_\mu)\ \gamma^\mu + m\right)\psi(x) = 0 \Longrightarrow (\partial_\mu \gamma^\mu - iqA_\mu \gamma^\mu + m)\,\psi(x) = 0 \tag{7.107}$$

$$(\not{\partial} - iq\,\not{A} + m)\,\psi(x) = 0 \tag{7.108}$$

c'est l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ.

7.10 Lagrangien du champ spinoriel complexe

Il est possible de retrouver les équation de Dirac et l'équation Dirac adjointe en utilisant la formulation lagrangienne. Notre choix du lagrangien est le suivant

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, \overline{\psi}, \partial_\mu\overline{\psi}, x_\mu) = -\overline{\psi}\,(\not{\partial} + m)\,\psi \tag{7.109}$$

<u>**Vérification**</u>: Vérifions que cette densité lagrangienne nous permet d'avoir les équations de mouvement du champs spinoriel complexe libre $(\psi, \overline{\psi})$. Pour faire cette vérification, il faut remplacer l'expression de la densité lagrangienne dans les équations d'Euler-Lagrange pour un champ,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \quad \text{avec} \quad \phi_i = \psi = \overline{\psi} \tag{7.110}$$

Donc, à chaque valeurs de ϕ_i correspond une équation de mouvement

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0 \longrightarrow \text{permet d'avoir l'équation adjointe de Dirac,} \tag{7.111}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0 \longrightarrow \text{permet d'avoir l'équation de Dirac,} \tag{7.112}$$

1- Retrouvons l'équation adjointe

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = -\partial_\mu \gamma^\mu - m\,\psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} = 0 \tag{7.113}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0 \Longrightarrow -\left(\partial_\mu\, \gamma^\mu + m\,\right)\psi = 0 \Longrightarrow (\,\not{\partial} + m\,)\,\psi = 0 \tag{7.114}$$

2- Retrouvons l'équation de Dirac,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\,\overline{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -\overline{\psi}\gamma^\mu \tag{7.115}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = 0 \Longrightarrow -m\,\overline{\psi} + \overline{\psi}\gamma^\mu \Longrightarrow \overline{\psi}\left(\overleftarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu - m\right) = 0 \Longrightarrow \overline{\psi}\left(\overleftarrow{\not{\partial}} + m\right) = 0 \tag{7.116}$$

Donc la densité lagrangienne du champ spinoriel complexe libre est donnée par

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\,(\,\not{\partial} + m\,)\,\psi = -\overline{\psi}\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu + m\,\right)\psi = -\overline{\psi}\overrightarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{7.117}$$

7.11 Lagrangien du champ spinoriel complexe en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Afin d'avoir les deux équations de mouvement des champs spinoriels ψ et $\overline{\psi}$, en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ, on utilise la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\,(\,\not{\partial} - iq\,\not{A} + m\,)\,\psi = -\overline{\psi}\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu - iq\,A_\mu\gamma^\mu + m\,\right)\psi \tag{7.118}$$

qu'on peut écrire sous la forme,

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\overrightarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu\psi - iq\,A_\mu\,\gamma^\mu\,\overline{\psi}\psi + m\overline{\psi}\psi \tag{7.119}$$

Rappelons que les équations de Dirac et l'équation de Dirac adjointe en présence d'un champ électromagnétique extérieur sont données par,

$$(\not{\partial} - iq\,\not{A} + m\,)\,\psi(x) = 0 \tag{7.120}$$

$$\overline{\psi}\left(\overleftarrow{\not{\partial}} + iq\,\not{A} + m\right)\psi(x) = 0 \tag{7.121}$$

<u>Vérification</u>: Vérifions que cette densité lagrangienne nous permet d'avoir les équations de mouvement du champs spinoriel complexe en présence d'un champ électromagnétique. Pour faire cette vérification, il faut remplacer l'expression de la densité lagrangienne dans les équations d'Euler-Lagrange pour un champ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0 \quad \text{avec} \quad \phi_i = \psi = \overline{\psi} \tag{7.122}$$

Donc, à chaque valeurs de ϕ_i correspond une équation de mouvement

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right) = 0 \tag{7.123}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})}\right) = 0 \tag{7.124}$$

1- Retrouvons l'équation adjointe

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = -\,(\not{\partial} - iq\,\not{A} + m\,)\,\psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} = 0 \tag{7.125}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})}\right) = 0 \Longrightarrow -\,(\not{\partial} - iq\,\not{A} + m\,)\,\psi = 0 \Longrightarrow (\not{\partial} - iq\,\not{A} + m\,)\,\psi = 0 \tag{7.126}$$

2- Retrouvons l'équation de Dirac,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = iq\,A_\mu\,\gamma^\mu\,\overline{\psi} - m\,\overline{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -\overline{\psi}\gamma^\mu \tag{7.127}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = 0 \Longrightarrow iq\, A_\mu\, \gamma^\mu\, \overline{\psi} - m\, \overline{\psi} + \overline{\psi}\gamma^\mu = 0 \Longrightarrow \overline{\psi} \left(\overleftarrow{\not{\partial}} + iq\, A_\mu\, \gamma^\mu - m \right) = 0 \quad (7.128)$$

7.12 Exercices d'application

Exercice 20 :

1^o/ En présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ, la dynamique d'une particule relativiste de charge q, de masse m et de spin non nul, peut être décrite par la densité lagrangienne du champ spinoriel suivante:

$$\mathcal{L}_2 = -\bar{\psi}(\not{\partial} - iq\ \not{A} + m)\psi = -\psi^\dagger \gamma^4 (\partial_\mu \gamma^\mu - iqA_\mu \gamma^\mu + m)\psi$$

1. Retrouver les équations de mouvement, en utilisant les équations d'Euler-Lagrange.

2^o/ En absence du champ électromagnétique, la dynamique de la particule libre peut être décrite par

$$\mathcal{L}_3 = -\bar{\psi}\ \not{\partial}\psi = -\psi^\dagger \gamma^4 \partial_\mu \gamma^\mu \psi$$

1. Montrer que cette densité lagrangienne est invariante dans la transformation de phase suivante:

$$\begin{cases} \psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta\gamma^5}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\theta\gamma^5} \end{cases} , \quad \theta \text{ est une constante.}$$

   ou $\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ et vérifie les relations: $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, $\left(\gamma^5\right)^\dagger = \gamma^5$ et $(\gamma^5)^2 = 1$.

2. Utiliser le Théorème de Noether pour retrouver les constantes de mouvement associées à cette transformation.

3^o/ Si on pose:

$$\begin{cases} \psi_L(x) = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi(x) \\ \psi_R(x) = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi(x) \end{cases}$$

1. Réécrire l'expression de la densité lagrangienne $\mathcal{L}_3$ en fonction de ψ_L et ψ_R.
2. Étudier l'invariance de la densité lagrangienne $\mathcal{L}_3$ dans la transformation de phase suivante:

$$\begin{cases} \psi_L(x) \longrightarrow \psi'_L(x) = \psi_L(x)e^{-i\alpha} \\ \psi_R(x) \longrightarrow \psi'_R(x) = \psi_R(x) \end{cases} , \quad \alpha \text{ est une constante.}$$