Formulation lagrangien de la théorie des champs

3.1 Rappel du formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange représente un outil extrêmement puissant pour décrire l'évolution d'un problème physique. Initialement aborder sous la forme du principe de moindre action, il permet de déterminer le comportement d'un système, dès que l'expression d'une grandeur physique, le lagrangien, est connue.
L'objectif de ce rappel est de revoir les notions fondamentales de la théorie lagrangienne, tout d'abord dans le cadre de l'étude d'une particule massive, puis dans celui de la théorie des champs.

3.1.1 Principe de moindre action

Étant dans un état initial donné, un système physique a une infinité de façons d'évoluer jusqu'à un état final donné: Pour tant, lors d'une transformation réelle une seule de ces transformations

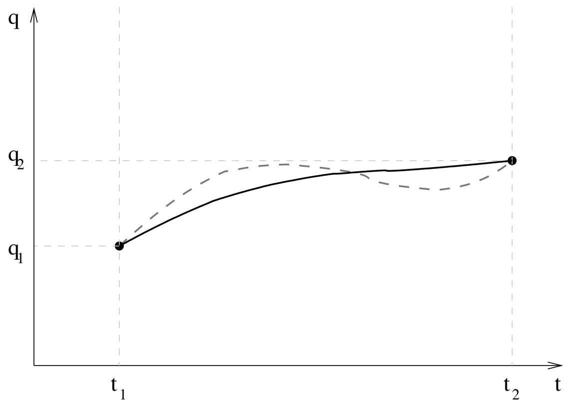

Figure 3.1: Transformation dans l'espace des coordonnées généralisées.

(évolutions) est effectivement réalisées. Comment peut-on déterminer cette évolution privilégiée

et la différentiée des autres? C'est à cette question que répond le principe de moindre action, qui peut être considérer comme l'un des postulats de la physique.
D'après le principe de moindre action, il existe une quantité appelée "Action" définit par,

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \qquad , \qquad i = 1 - - - - N \tag{3.1}$$

dont la valeur change lors de l'évolution du système et qui doit être minimale le long de la transformation réelle. L'action S est définie comme l'intégrale d'une quantité appelée "Lagrangien", et qui est fonction des coordonnées généralisées q et des vitesses généralisées $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$.

3.1.2 Équations d'Euler-Lagrange

Parmi toutes les trajectoires qui passent par les deux points fixes ($\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$) de coordonnées généralisées $Q_1 = q(t_1)$ et $Q_2 = q(t_2)$, les trajectoires physiques sont celles qui rendent l'action S minimale $\Delta S \simeq 0$.

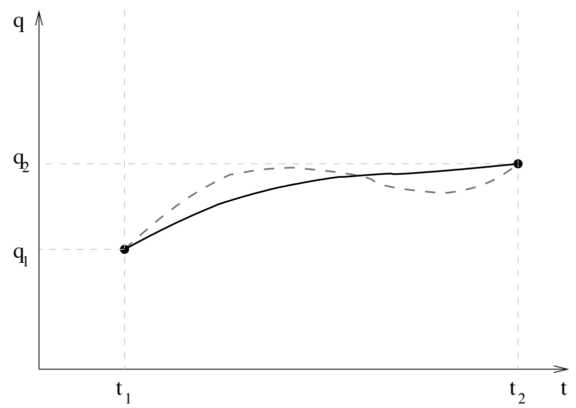

Figure 3.2: Transformation dans l'espace des coordonnées généralisées.

Si $\delta(q(t))$ est une fonction infinitésimale, alors

$$\Delta S[q] \simeq S(q + \delta q) - S(q) \tag{3.2}$$

On a

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q, \dot{q}, t) \quad \Longrightarrow \quad \Delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt[\ L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \ L(q, \dot{q}, t)] \tag{3.3}$$

Or,

$$L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \tag{3.4}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Delta S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} - \ L(q,\dot{q},t)\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right] \simeq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si on pose

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) \tag{3.6}$$

On aussi,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q \tag{3.7}$$

En remplaçant dans l'équation (3.5), on retrouve,

$$\begin{aligned}\Delta S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\right] + \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] \simeq 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Où

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \int_{t_1}^{t_2} d\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = 0 \tag{3.9}$$

Finalement, les équations d'Euler-Lagrange sont données par,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \tag{3.10}$$

3.1.3 Choix du lagrangien

Le choix du lagrangien n'est pas unique.

- Si on remplace le lagrangien L par (αL), où α est un réel, alors les équations de mouvement restent inchangées.

- Si on remplace le lagrangien L par $(\beta + L)$, où β est une constante, alors les équations de mouvement restent inchangées.
- Si on remplace le lagrangien L par $(L + \frac{dF}{dt})$, où $F = F(q, \dot{q}, t)$ est un lagrangien, alors les équations de mouvement restent inchangées.

Exercice 7 :
Montrer que la variation ΔS reste invariante par changement du lagrangien L par $L + \frac{dF}{dt}$.

3.1.4 Formulation hamiltonienne

L'hamiltonien H est donné par

$$H(p, q, t) = P_i \dot{q}_i - L \tag{3.11}$$

L'impulsion généralisée est donnée par

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.12}$$

Exercice 8 :
Montrer que si le lagrangien L ne dépend pas explicitement du temps t, alors $\frac{dH}{dt} = 0$
Solution 1 :

$$\frac{dH}{dt} = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} \tag{3.13}$$

Or, on a

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{3.14}$$

Donc,

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial t} = -\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)\frac{\partial q}{\partial t} = 0 \tag{3.15}$$

3.2 Théorie des champs classiques

3.2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons examiner comment généraliser le formalisme de la mécanique analytique au cas de systèmes comportant un nombre infini de particules (degrés de libertés). Un champ par définition est un système possédant un nombre infini de degrés de libertés. Le passage de la mécanique classique à la théorie des champs peut se faire en remplaçant les coordonnées

généralisées $q_i(t)$ par un champ scalaire $\phi(\vec{r},t) \equiv \phi_{\vec{r}}(t)$, et qu'on notera dans le cas relativiste par $\phi(x_\mu)$ où x_μ est un point de l'espace de Minkowski.
Par analogie, on définit la forme générale du lagrangien en théorie des champs et qu'on écrit,

$$L = \int_V \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)\, d^3x \tag{3.16}$$

où $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)$ est une densité lagrangienne.

3.2.2 Équations d'Euler-Lagrange pour un champ

L'action S est donnée par

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)\, d^3x = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)\, d^4x \tag{3.17}$$

où Ω est un volume d'espace-temps sur lequel on intègre la densité lagrangienne pour avoir l'action. L'élément de volume d'espace-temps est donnée par: $d\Omega = d^4x = dt\, d^3x$.
La méthode à utiliser pour avoir les équations de mouvement est exactement la même qu'en mécanique analytique. On fait alors varier l'action $S(\phi(x_\mu))$ sur une trajectoire en effectuant la transformation suivante,

$$\phi(x_\mu) \longrightarrow \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) \quad \text{où} \quad \delta\phi(x_\mu) << 1 \tag{3.18}$$

L'application du principe de moindre action revient à prendre $\delta S \simeq 0$.

$$\delta S \simeq 0 \Leftrightarrow S(\phi + \delta\phi) - S(\phi) \simeq 0 \tag{3.19}$$

On a

$$S(\phi) = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)\, d^4x \tag{3.20}$$

Donc,

$$S(\phi + \delta\phi) = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi), x_\mu)\, d^4x \tag{3.21}$$

$$\delta S = \int_\Omega \left[\mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi), x_\mu) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu) \right] d^4x \simeq 0 \tag{3.22}$$

En appliquant un développement limité, $\mathcal{L}(\phi+\delta\phi, \partial_\mu\phi+\delta(\partial_\mu\phi), x_\mu)$ peut s'écrire sous la forme suivante,

$$\mathcal{L}(\phi+\delta\phi, \partial_\mu\phi+\delta(\partial_\mu\phi), x_\mu) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x_\mu) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + ... \tag{3.23}$$

On pose,

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi) \tag{3.24}$$

Maintenant, en calculant le terme,

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \tag{3.25}$$

On retrouve,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x_\mu) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi \tag{3.26}$$

En remplaçant (3.26) dans (3.23), on retrouve

$$\mathcal{L}(\phi+\delta\phi, \partial_\mu\phi+\delta(\partial_\mu\phi), x_\mu) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x_\mu) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi \tag{3.27}$$

Après simplification, on trouve les équations d'Euler-Lagrange appliquées à N champs scalaires,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right) = 0 \tag{3.28}$$

3.2.3 Moment conjugué

En mécanique analytique, le moment conjugué ou impulsion généralisée P_i d'une variable généralisée q_i est définit par,

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} \tag{3.29}$$

Par analogie à cette définition, on définit le moment conjugué à un champ $\phi(x_\mu)$ comme suit,

$$\Pi_{\phi_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_i} = \Pi_i \tag{3.30}$$

3.2.4 Densité hamiltonienne

En mécanique classique, l'hamiltonien total d'un système physique est donné par

$$H = P_i \dot{q}_i - L \tag{3.31}$$

Par analogie à cette définition, on définit la densité hamiltonienne h par,

$$h = \Pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L} \tag{3.32}$$

L'hamiltonien total sera définit par,

$$H = \int_V h(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)\, d^3x \tag{3.33}$$

3.3 Principe de base de la théorie des champs

Dans un cas général, on associe à chaque particules de spin nul un champ scalaire. Pour décrire N particules, on définit N champs scalaires. Donc le système de ces N champs sera décrit par une densité lagrangienne ayant la forme suivante,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi_1, \partial_\mu\phi_1, \phi_2, \partial_\mu\phi_2 \ldots \phi_N, \partial_\mu\phi_N, x_\mu\right) = \mathcal{L}\left(\phi_i, \partial_\mu\phi_i, x_\mu\right) \text{ avec } i = 1 \longrightarrow N \tag{3.34}$$

Le mouvement des ces N champs scalaires sera décrit par N équations d'Euler-Lagrange suivantes,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) = 0 \tag{3.35}$$

On dit alors que le champ scalaire $\phi(x_\mu)$ est un système à N degrés de libertés.
Par définition, le champ scalaire est le cas le plus simple. Il se transforme de la façon suivante,

$$\phi(x_\mu) = \phi'(x'_\mu) \tag{3.36}$$

- Le champs scalaire (champ de Klein-Gordon) permet de décrire la physique de particules de spin nul et ayant des vitesses relativistes c.
- Le champ scalaire peut être soit réel $\phi(x_\mu) = \phi^*(x_\mu)$, soit complexe $\phi(x_\mu) \neq \phi^*(x_\mu)$.

3.3.1 Champ scalaire libre

Quelle est la forme générale de la densité lagrangienne qu'il faut choisir pour avoir l'équation de Klein-Gordon libre donnée par l'équation suivante,

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2\right) \phi(x_\mu) = 0 \tag{3.37}$$

Réponse: Le choix n'est pas unique. Notre choix est le suivant,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu) = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{3.38}$$

Vérification: Remplaçons dans les équations d'Euler-Lagrange, avec $\phi_i = \phi = \phi^*$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \tag{3.39}$$

Avec $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -\partial_\mu \phi.$
En remplaçant dans l'équation (3.39), on retrouve l'équation de Klein-Gordon,

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2\right) \phi(x_\mu) = 0 \tag{3.40}$$

3.3.2 Champ scalaire complexe libre

Si $\phi = \phi^*$, quelle est la forme générale de la densité lagrangienne qu'il faut choisir pour avoir les deux équations suivantes,

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2\right) \phi(x_\mu) = 0 \ \ , \ \left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2\right) \phi^*(x_\mu) = 0 \tag{3.41}$$

Réponse: Notre choix est le suivant,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \phi^*, \partial_\mu \phi^*, x_\mu) = -\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial_\mu \phi^*\right) - m^2 \phi \phi^* \tag{3.42}$$

Vérification: Remplaçons dans les deux équations d'Euler-Lagrange pour $\phi_i = \phi$, ϕ^*,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \right) = 0 \tag{3.43}$$

Avec $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = -m^2\phi, \quad \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} = -\partial_\mu\phi, \quad \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi^*, \quad \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = -\partial_\mu\phi^*.$
En remplaçant dans l'équation (3.43), on retrouve les deux équations suivantes,

$$\left(\partial_\mu\partial_\mu - m^2\right)\phi(x_\mu) = 0 \quad , \quad \left(\partial_\mu\partial_\mu - m^2\right)\phi^*(x_\mu) = 0 \tag{3.44}$$

3.3.3 Champ scalaire complexe en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Quelle est la forme générale de la densité lagrangienne qu'il faut choisir pour avoir les deux équations suivantes,

$$\left[\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0 \tag{3.45}$$

$$\left[\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) - m^2\right]\phi^*(x_\mu) = 0 \tag{3.46}$$

Réponse: Notre choix est le suivant,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi^*, x_\mu) = -\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\phi^*\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\phi - m^2\phi\phi^* \tag{3.47}$$

Exercice 9 :
Vérifier que la densité lagrangienne donnée dans l'équation (3.47) nous permet d'avoir les deux équations de mouvements dans (3.45) et (3.46).

3.3.4 Remarque

- Le champ de Klein-Gordon complexe est équivalent à deux champs scalaires réels ϕ_1 et ϕ_2. Ce dernier est donné par,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{3.48}$$

- La densité lagrangienne du champ scalaire en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ peut s'écrire sous la forme suivante,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi^*, x_\mu) = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_I \tag{3.49}$$

Notons que $\mathcal{L}_o$ représente la densité lagrangienne du champ scalaire complexe libre. Cette dernière est la somme des termes cinétique $((\partial_\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi)$ et du terme de masse $(m^2\phi\phi^*)$.

$$\mathcal{L}_o = -(\partial_\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2\phi\phi^* \tag{3.50}$$

Alors que $\mathcal{L}_I$ représente la densité lagrangienne due à l'interaction du champ scalaire complexe (ϕ, ϕ^*) avec le champ électromagnétique extérieur A_μ.

$$\mathcal{L}_I = -iqA_\mu\phi^*(\partial_\mu - iqA_\mu)\phi + iqA_\mu\phi(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi^* \tag{3.51}$$

Exercice 10 :
On donne l'expression de la densité lagrangienne du champ scalaire complexe libre par,

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2\phi\phi^* \tag{3.52}$$

- Réécrire la densité lagrangienne en fonction des champs scalaires réels (ϕ_1, ϕ_2) donnés par,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \;\; \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{3.53}$$

- Retrouver les équations de mouvement des champs scalaires (ϕ_1, ϕ_2).

Exercice 11 :
Considérons la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L}1 = -\frac{\hbar}{2i}(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m}(\overrightarrow{\partial}\psi)(\overrightarrow{\partial}\psi^*) - V(\overrightarrow{r}, t)\psi^*\psi \tag{3.54}$$

1. Retrouver les équations de mouvement.
2. Calculer les moments conjugués.
3. Retrouver la forme de la densité hamiltonienne.
4. Déduire la forme de l'hamiltonien total.