

4 Dimensionnement des sections en flexion simple

4.1 Généralités

4.1.1 Domaine d'application

Un élément est soumis à de la flexion simple si les sollicitations se réduisent à un moment fléchissant M_z et un effort tranchant V_y . Si l'effort normal N_x n'est pas nul, alors on parle de flexion composée (voir la partie 11). En béton armé on distingue l'action du moment fléchissant qui conduit au dimensionnement des aciers longitudinaux de l'action de l'effort tranchant qui concerne le dimensionnement des aciers transversaux (cadres, épingle ou étriers). Ces deux calculs sont menés séparément, et dans cette partie on se limitera aux calculs relatifs au moment fléchissant. La partie 5 traitera des calculs relatifs à l'effort tranchant.

Les éléments d'une structure soumis à de la flexion simple sont principalement les poutres, qu'elles soient isostatiques ou continues. Pour une poutre isostatique, le calcul des sollicitations M_z et V_y est simple et il est conduit en utilisant les méthodes de la résistance de matériaux (RdM). Pour une poutre continue, l'hyperstaticité rend les calculs plus compliqués et le BAEL propose deux méthodes qui permettent d'évaluer les sollicitations dans les poutres continues en béton armé. Ces deux méthodes sont présentées dans la partie 7 ainsi que la construction de l'épure d'arrêt de barres à partir de la connaissance de la courbe enveloppe du moment fléchissant.

Ce qui suit est limité au calcul des sections rectangulaires et en T sans acier comprimé. Pour ce qui est des sections en T on se reportera au paragraphe 4.4. S'il apparaît nécessaire de placer des aciers comprimés dans une section de béton, c'est que son coffrage est mal dimensionné et il est préférable pour des raisons économiques, mais aussi de fonctionnement, de le modifier.

4.1.2 Portées des poutres

En béton armé, la portée des poutres à prendre en compte est (voir Figure 24) :

- la portée entr'axe d'appuis lorsqu'il y a des appareils d'appui ou que la poutre repose sur des voiles en maçonnerie,
- la portée entre nus d'appuis lorsque les appuis sont en béton armé (poutre principale, poteau ou voile).

4.2 Flexion simple à l'ELU

4.2.1 Hypothèses

Les principales hypothèses du calcul des sections en BA soumises à de la flexion simple aux ELU sont les suivantes :

- ✓ les sections planes restent planes,
- ✓ il n'y a pas de glissement à l'interface béton-armatures,
- ✓ le béton tendu est négligé,
- ✓ l'aire des aciers n'est pas déduite de celle du béton,
- ✓ l'aire des aciers est concentrée en son centre de gravité,
- ✓ le comportement de l'acier est défini par le diagramme contrainte-déformation

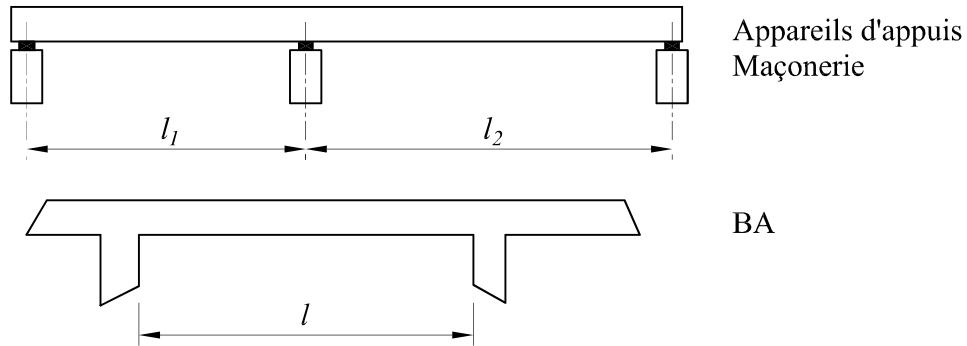


Fig. 24 : Définition de la portée d'une poutre selon qu'elle repose sur des appareils d'appuis, des éléments en maçonnerie ou en béton armé.

de calcul de la Figure 12.

- ✓ pour le comportement du béton, on adoptera le diagramme rectangulaire simplifié (car la section n'est que partiellement comprimée) , défini sur la Figure 25, où la contrainte de calcul à l'ELU du béton est donnée par :

$$f_{bu} = \frac{0.85 f_{cj}}{\theta \gamma_b},$$

avec

- \$f_{cj}\$ la résistance caractéristique requise en compression à \$j\$ jours du béton,
- \$\theta\$ un coefficient qui tient compte de la durée d'application des charges.
- \$\gamma_b = 1.5\$ dans les cas courants.

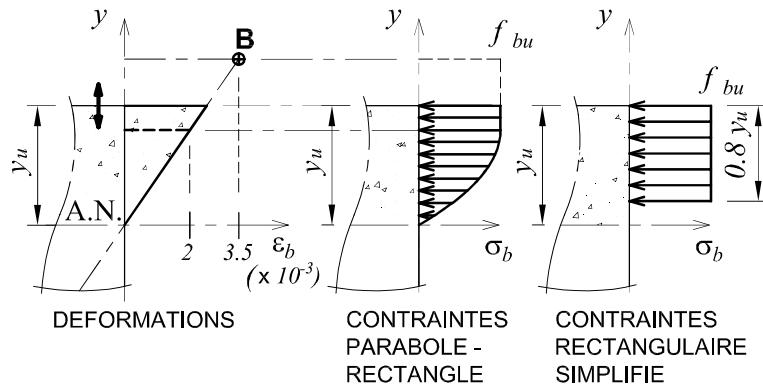


Fig. 25 : Définition des diagrammes contrainte-déformation parabole-rectangle Figure (8) et rectangulaire simplifié dans la section de béton comprimé

4.2.2 Notations

Pour les calculs aux ELU, on utilise les notations de la Figure 26, où:

- ✓ \$b\$ et \$h\$ sont la largeur et la hauteur de la section de béton.
- ✓ \$A_s\$ est la section d'acier, dont le centre de gravité est positionné à \$d\$ de la

fibre la plus comprimée du coffrage.

- ✓ y_u est la position de l'axe neutre par rapport à la fibre la plus comprimée du coffrage.
- ✓ σ_{st} est la valeur de la contrainte de calcul des aciers, limitée à f_{su} .

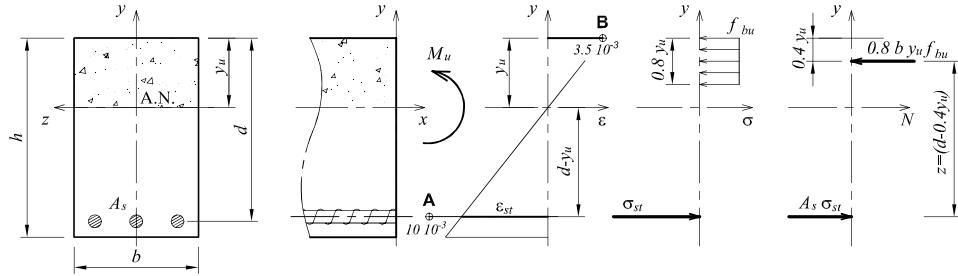


Fig. 26: Notations utilisées pour les calculs de flexion simple à l'ELU.

4.2.3 Droites de déformation - Pivots

Pour les calculs à l'ELU, on suppose qu'un point de la droite de déformation dans la section est fixé. Ce point s'appelle le *pivot*. Soit il correspond à la déformation limite de traction dans les aciers $\epsilon_{st} = 10\%$: c'est le Pivot A, soit il correspond à la déformation limite en compression du béton $\epsilon_{bc\max} = 3.5\%$: c'est le Pivot B. Toutes les droites de déformation comprises entre la droite (Pivot A, $\epsilon_{bc\max} = 0$) et ($\epsilon_{st} = 0\%$, Pivot B) sont possibles, comme le montre la Figure 27. Le bon fonctionnement de la section de Béton Armé se situe aux alentours de la droite AB, car les deux matériaux - acier et béton - travaillent *au mieux*.

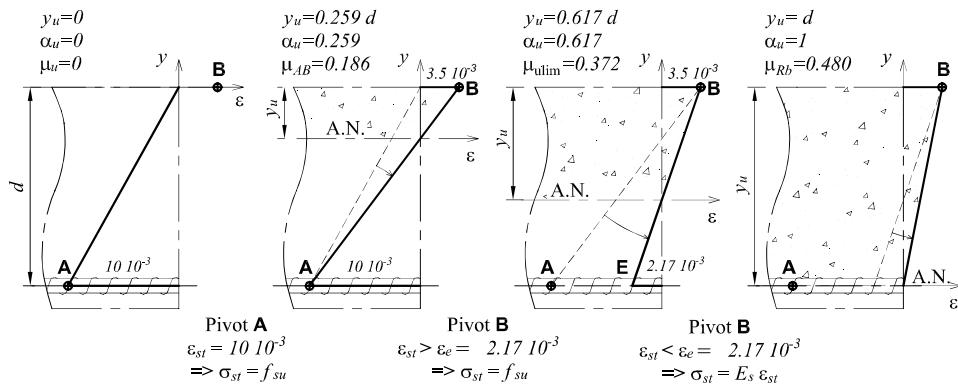


Fig. 27 : Définitions des différentes droites de déformation possibles en flexion simple à l'ELU et des Pivots.

4.2.4 Equations de l'équilibre

L'équilibre de la section vis à vis de l'effort normal et du moment fléchissant conduit aux deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{selon N : } N_u &= 0.8by_u f_{bu} - A_s \sigma_{st} = 0 \\ \text{selon M : } M_u &= 0.8by_u f_{bu}(d - 0.4y_u) && \text{en } y = -(d - y_u) \\ &= A_s \sigma_{st}(d - 0.4y_u) && \text{en } y = 0.6y_u \\ &= 0.8by_u f_{bu}0.6y_u + A_s \sigma_{st}(d - y_u) && \text{en } y = 0 \end{aligned}$$

4.2.5 Compatibilité des déformations

L'hypothèse de continuité des déformations dans la section (pas de glissement des armatures par rapport au béton) conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\epsilon_{bc_{\max}}}{y_u} = \frac{\epsilon_{st}}{d - y_u},$$

d'où si la droite de déformation passe par le pivot A, la déformation maximale du béton comprimé vaut :

$$\text{Pivot A: } \epsilon_{bc_{\max}} = \frac{y_u}{d - y_u} 10\% \text{,}$$

et si la droite de déformation passe par le pivot B, la déformation des aciers vaut :

$$\text{Pivot B: } \epsilon_{st} = \frac{d - y_u}{y_u} 3.5\%.$$

4.2.6 Adimensionnement :

On définit les quantités adimensionnées suivantes : $\alpha_u = \frac{y_u}{d}$ la hauteur réduite et $\mu_u = \frac{M_u}{bd^2 f_{bu}}$ le moment ultime réduit.

Il vient d'après les équations de l'équilibre :

$$\mu_u = 0.8\alpha_u(1 - 0.4\alpha_u).$$

La hauteur réduite est solution de l'équation du second degrés précédente :

$$\alpha_u = 1.25(1 - \sqrt{1 - 2\mu_u}).$$

4.2.7 Calcul des sections d'acier

Dans la phase de calcul des aciers, les inconnues sont : A_s , σ_{st} , d et y_u . Afin d'éliminer une inconnue, on fait l'hypothèse complémentaire $d \approx 0.9h$. On calcule le moment ultime réduit μ_u , puis α_u . Le Pivot et la contrainte dans les aciers σ_{st} sont déterminés à partir de l'abaque de la Figure 28, en fonction de la valeur de α_u .

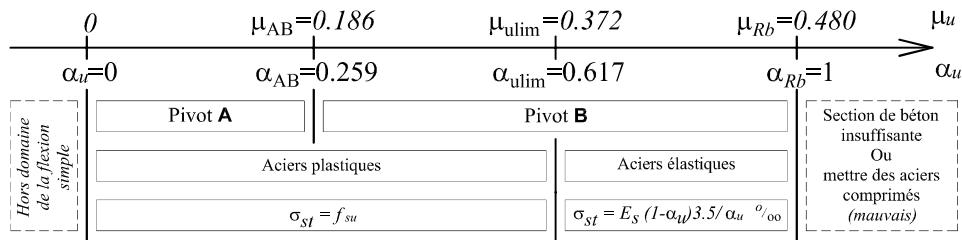


Fig. 28 : Valeurs de α_u , du pivot et des la contrainte dans les aciers tendus σ_{st} en fonction de la valeur du moment ultime réduit μ_u .

La section d'acier est ensuite obtenue par :

$$A_s = \frac{M_u}{\sigma_{std}(1 - 0.4\alpha_u)}.$$

Après ce calcul, il est bon de calculer la valeur exacte de d en fonction du ferraillage mis en place et de vérifier qu'elle est supérieure à $0.9h$, ce qui va dans le sens de la sécurité. On peut éventuellement itérer afin d'optimiser le ferraillage.

4.2.8 Pré-dimensionnement

Pour un pré-dimensionnement rapide de la hauteur du coffrage, on se place sur la droite de déformation AB ($\mu_u \approx 0.2$), d'où

$$bd^2 \approx \frac{M_u}{0.2f_{bu}},$$

avec $d \approx 0.9h$ et $b \approx 0.3h$.

4.3 Flexion simple à l'ELS

Ce qui suit est limité au calcul des sections rectangulaires sans acier comprimé. L'ELS est dimensionnant par rapport à l'ELU lorsque la fissuration est considérée comme très préjudiciable à la tenue de l'ouvrage dans le temps (FTP) et parfois lorsqu'elle est préjudiciable (FP). Dans ce dernier cas, on dimensionnera à l'ELU et on vérifiera que la section d'acier est suffisante pour l'ELS. En FTP, il faut faire le calcul de la section d'acier directement à l'ELS.

4.3.1 Hypothèses

Les principales hypothèses du calcul des sections en BA soumises à de la flexion simple aux ELS sont les suivantes :

- ✓ les sections planes restent planes,
- ✓ il n'y a pas de glissement à l'interface béton-armatures,
- ✓ le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux élastiques,
- ✓ le béton tendu est négligé,
- ✓ l'aire des aciers n'est pas déduite de celle du béton,

- ✓ l'aire des aciers est concentrée en son centre de gravité,
- ✓ le coefficient d'équivalence $n = E_s/E_{\nu_j}$ est fixé forfaitairement à $n = 15$.

4.3.2 Notations

Pour les calculs aux ELS, on utilise les notations définies sur la Figure 29, où:

- ✓ b et h sont la largeur et la hauteur de la section de béton.
- ✓ A_s est la section d'acier, dont le centre de gravité est positionné à d de la fibre la plus comprimée du coffrage.
- ✓ y_1 est la position de l'axe neutre par rapport à la fibre la plus comprimée du coffrage.
- ✓ $\sigma_{st} = E_s \epsilon_{st}$ est la contrainte de calcul des aciers, définie à partir du module d'Young de l'acier E_s et de la déformation dans les aciers ϵ_{st} .
- ✓ $\sigma_{bc\max} = E_b \epsilon_{bc\max}$ est la contrainte de calcul du béton comprimé, définie à partir du module d'Young du béton E_b et de la déformation maximale du béton comprimé $\epsilon_{bc\max}$.

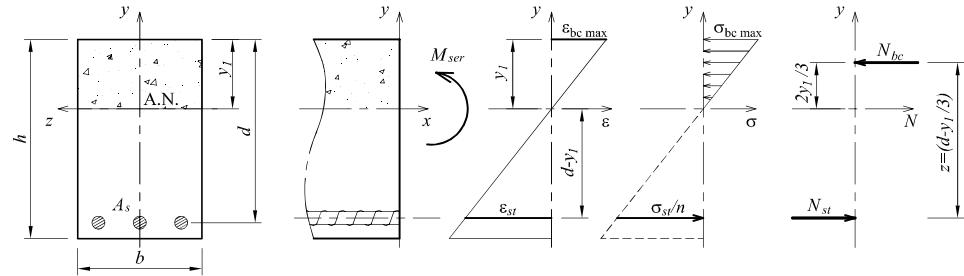


Fig. 29: Notations utilisées pour les calculs en flexion simple à l'ELS.

4.3.3 Équations de l'équilibre

L'équilibre de la section vis à vis de l'effort normal et du moment fléchissant conduit aux deux équations suivantes :

$$\text{selon } N : \quad N_{ser} = \frac{1}{2}by_1\sigma_{bc\max} - A_s\sigma_{st} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{selon } M : \quad M_{ser} &= \frac{1}{2}by_1\sigma_{bc\max}(d - \frac{y_1}{3}) && \text{en } y = -(d - y_1) \\ &= A_s\sigma_{st}(d - \frac{y_1}{3}) && \text{en } y = \frac{2}{3}y_1 \\ &= \frac{1}{3}by_1^2\sigma_{bc\max} + A_s\sigma_{st}(d - y_1) && \text{en } y = 0 \end{aligned}$$

Notons que les trois expressions du moment fléchissant en trois points différents de la section sont rigoureusement identiques puisque l'effort normal est nul (sollicitation de flexion simple).

4.3.4 Compatibilité des déformations

L'hypothèse de continuité des déformations dans la section (pas de glissement des armatures par rapport au béton) conduit à l'équation suivante entre les déformations :

$$\frac{\epsilon_{bc_{\max}}}{y_1} = \frac{\epsilon_{st}}{d - y_1}$$

L'acier et le béton ayant un comportement élastique, on en déduit une relation entre les contraintes :

$$\frac{\sigma_{bc_{\max}}}{y_1} = \frac{\sigma_{st}}{n(d - y_1)}$$

4.3.5 Contraintes limites dans les matériaux

L'ELS consiste à vérifier que les contraintes maximales dans la section la plus sollicitée restent inférieures à des valeurs limites fixées réglementairement. On distingue :

✓ **l'ELS de compression du béton :**

$$\sigma_{bc_{\max}} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 0.6 f_{c_j}$$

✓ **l'ELS d'ouverture de fissures :**

$$\sigma_{st} \leq \bar{\sigma}_{st}$$

où

$\bar{\sigma}_{st} = f_e$ si la fissuration est considérée peu préjudiciable (FPP) à la tenue de l'ouvrage dans le temps,

$\bar{\sigma}_{st} = \text{Min}\{2f_e/3; \text{Max}\{0.5f_e; 110\sqrt{\eta f_{t_j}}\}\}$ si la fissuration est préjudiciable (FP),

$\bar{\sigma}_{st} = 0.8 \text{Min}\{2f_e/3; \text{Max}\{0.5f_e; 110\sqrt{\eta f_{t_j}}\}\}$ si la fissuration est très préjudiciable (FTP).

Dans ces formules η est un coefficient qui dépend du type d'acier : $\eta = 1.6$ pour des HA $> 6\text{ mm}$, $\eta = 1.0$ pour des ronds lisses et $\eta = 1.3$ pour des HA $< 6\text{ mm}$.

4.3.6 Dimensionnement et vérification

Pour le calcul de la section d'acier (dimensionnement) ou de calcul des contraintes maximales (vérification), on adoptera la démarche présentée dans le tableau de la Figure 30. Pour un calcul rapide, on pourra utiliser l'abaques de la Figure 31.

4.4 Section en T

4.4.1 Pourquoi des sections en T ?

Les poutres en béton armé d'un bâtiment supportent souvent des dalles. Il est alors loisible de considérer que la dalle supportée par la poutre reprend une partie des contraintes de compression induites par la flexion de la poutre. Attention, ceci n'est vrai que si la dalle est comprimée, c'est-à-dire si la poutre subit un

	Dimensionnement	Vérification
Données	M_{ser} , b , h , f_{cj} , f_e	M_{ser} , A_s , b , h , d , f_{cj} , f_e
Inconnues	A_s , y_1 , $\sigma_{bc\max}$, σ_{st} , d	y_1 , $\sigma_{bc\max}$, σ_{st}
Equations comp.	$d \approx 0.9h$ $\sigma_{st} = \bar{\sigma}_{st}$	
Résolution	$M'_{ser} = \frac{1}{2}by_{1\lim}\bar{\sigma}_{bc}(d - y_{1\lim}/3)$ avec $y_{1\lim} = d \frac{n\bar{\sigma}_{bc}}{n\bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_{st}}$ ✓ si $M_{ser} \leq M'_{ser}$ continuer ✓ si $M_{ser} > M'_{ser}$ augmenter b et/ou h ou placer des aciers comprimés (<i>mauvais</i>) on pose $\alpha = \frac{y_1}{d}$ calcul de $\mu_{ser} = \frac{nM_{ser}}{bd^2\bar{\sigma}_{st}}$ α solution de $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 6\mu_{ser}(\alpha - 1) = 0$ section d'acier : $A_s = \frac{M_{ser}}{\bar{\sigma}_{st}d(1 - \alpha/3)}$	y_1 solution de $\frac{1}{2}by_1^2 - nA_s(d - y_1) = 0$ calcul de : $I_1 = \frac{1}{3}by_1^3 + nA_s(d - y_1)^2$ Vérifier : ✓ $\sigma_{bc\max} = \frac{M_{ser}}{I_1}y_1 \leq \bar{\sigma}_{bc}$ ✓ $\sigma_{st} = \frac{nM_{ser}}{I_1}(d - y_1) \leq \bar{\sigma}_{st}$

Fig. 30 : Etapes du dimensionnement des sections d'acier et de la vérification des contraintes en flexion simple à l'ELS.

moment positif. Donc, pour une poutre continue, seule la partie en travée est concernée et sur appui il faudra considérer une poutre rectangulaire de largeur la largeur de l'âme.

Le BAEL (A.4.1,3) définit la largeur du débord à prendre en compte de façon forfaitaire (voir la Figure 32), comme au plus égale à :

- le dixième de la portée de la poutre,
- les deux tiers de la distance de la section considérée à l'axe de l'appui le plus proche,
- la moitié de la distance entre deux poutres supportant la même dalle.

On peut aussi rencontrer des poutres en béton armé de sections en T (ou en I) sur des charpentes industrielles. Dans ce cas, la largeur du débord est donné par la géométrie de la section de béton.

4.4.2 Fonctionnement des sections en T

On utilise les notations définies sur la Figure 33. Que l'on soit à l'ELU ou à l'ELS, la façon de traiter le calcul est identique (en gardant bien sûr les hypothèses de l'état limite considéré). On traitera donc ici les deux états limites en parallèle.

FLEXION SIMPLE ELS

Dimensionnement section d'acier

$$nM_{ser}/\bar{\sigma}_{st}bd^2$$

$$\text{lecture de } \alpha, \text{ calcul de } A_s = M_{ser}/\bar{\sigma}_{st}d(1-\alpha/3)$$

43

Vérification des contraintes

$$nA_s/bd$$

lecture de α , calcul de I_I , puis vérification σ_{st} et $\sigma_{bc \max}$

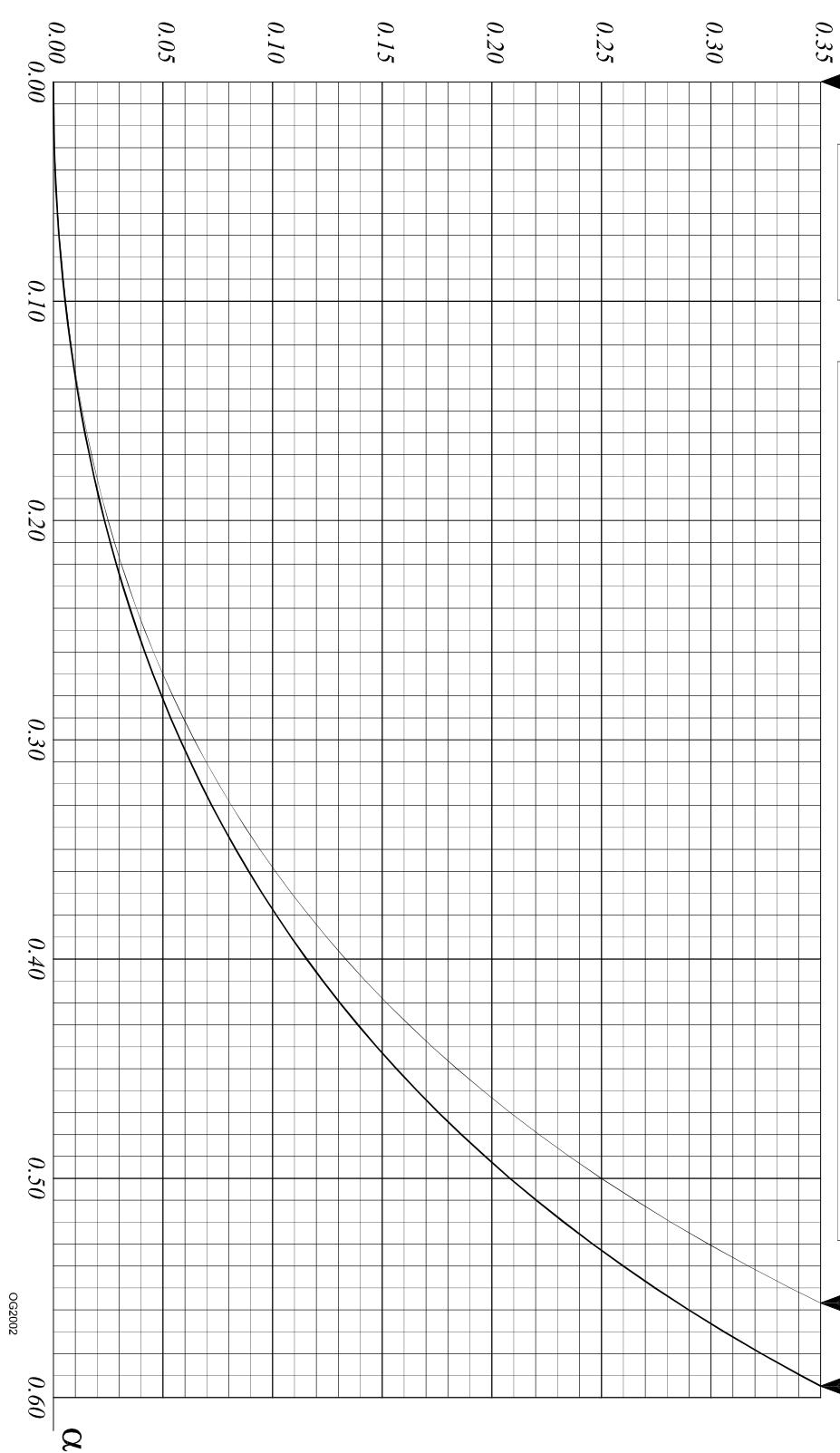


Fig. 31 : Abaques de Dimensionnement et de vérification en flexion simple à l'ELS.

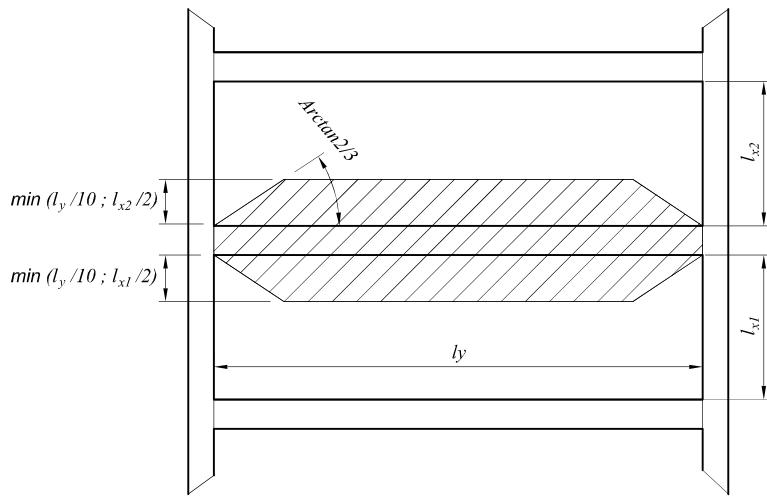


Fig. 32 : Dimensions des débords à prendre en compte pour le calcul d'une poutre en T.

On distinguera deux cas, selon que l'axe neutre est compris dans la table de compression ou non :

- ✓ L'axe neutre est dans la table de compression. On a donc $y_u \leq h_1$ (ou $y_1 \leq h_1$ à l'ELS). Le béton tendu étant négligé, la poutre en T se calcule exactement comme une poutre rectangulaire de largeur b , à l'ELU ou à l'ELS.
- ✓ L'axe neutre est sous la table de compression. On a donc $y_u > h_1$ (ou $y_1 > h_1$ à l'ELS). Une partie de la contrainte normale est reprise par la table de compression de largeur b , l'autre par une partie de l'âme de largeur b_0 et de hauteur $0.8y_u - h_1$ à l'ELU ($y_1 - h_1$ à l'ELS).

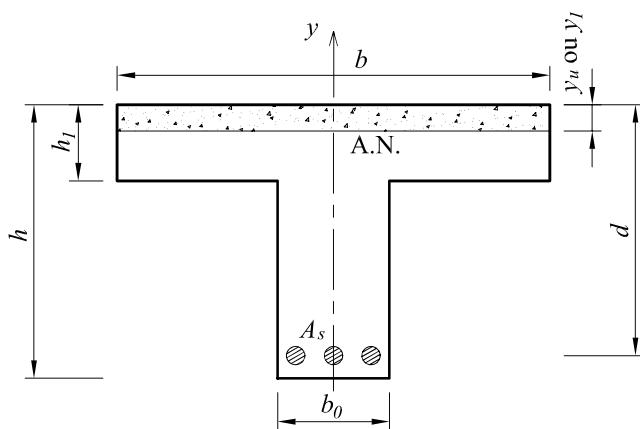


Fig. 33: Notations utilisées pour le calcul d'une poutre en T.

Détermination a posteriori C'est le calcul recommandé. En effet dans 99% des cas, une poutre en T se calcule comme une poutre rectangulaire. On fera donc le calcul de la poutre en T comme si c'était une poutre rectangulaire de

largeur b . On vérifiera a posteriori que $y_u \leq h_1$ (ou $y_1 \leq h_1$ à l'ELS). Si cette condition n'est pas vérifiée, il faut refaire le calcul avec les hypothèses d'une poutre en T (voir plus loin).

Détermination a priori Ce n'est pas le calcul recommandé, pour les raisons données plus haut. On calculera en préambule le *moment résistant de la table* défini comme le moment que peut reprendre la table si elle est entièrement comprimée ($0.8y_u = h_1$ à l'ELU ou $y_1 = h_1$ à l'ELS). Ce moment vaut :

$$\begin{cases} M_{tu} = bh_1 f_{bu}(d - \frac{h_1}{2}) & \text{à l'ELU} \\ M_{tsr} = b\frac{h_1}{2}\bar{\sigma}_{bc}(d - \frac{h_1}{3}) & \text{à l'ELS} \end{cases}$$

4.4.3 Calcul des vrais sections en T

Avant d'entamer ce calcul on regardera s'il n'est pas possible de modifier le coffrage de la poutre (h et/ou h_1) de telle sorte que l'axe neutre se retrouve dans la table de compression. C'est de loin la meilleure solution, car si l'axe neutre est en dessous de la table, cela veut dire que la poutre risque de ne pas vérifier les conditions de flèches maximales.

A l'ELU Les calculs à l'ELU sont conduits en soustrayant au moment fléchissant à reprendre M_u le moment fléchissant repris par les débords du hourdis M_{utable} , comme indiqué sur la Figure 34. On se ramène donc au calcul de deux sections rectangulaires, l'une de largeur $b - b_0$ et l'autre de largeur b_0 .

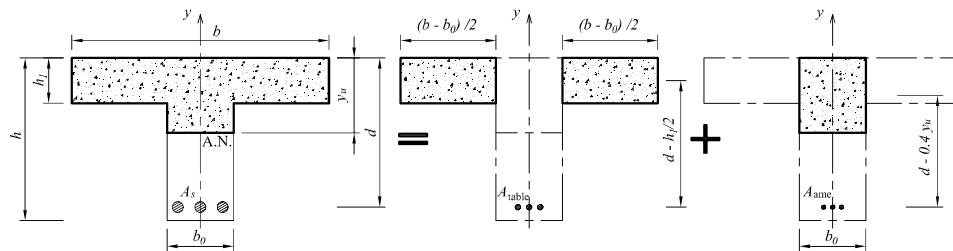


Fig. 34 : Principe du calcul de la section d'acier pour une poutre en T à l'ELU : le moment ultime est repris d'une part par les débords de la table et d'autre part par la partie de l'âme au dessus de l'axe neutre.

Les étapes du calcul sont les suivantes :

1. calcul de la part de moment repris par les débords de la table :

$$M_{utable} = (b - b_0)h_1 f_{bu}(d - h_1/2).$$
2. calcul de la part de moment que doit reprendre l'âme :

$$M_{uame} = M_u - M_{utable}.$$
3. calcul classique de la section d'acier à prévoir pour reprendre M_{uame} (calcul du moment ultime réduit μ_u , de α_u et de σ_{st}).

4. calcul de la section d'acier à mettre en place $A_s = A_{\text{ame}} + A_{\text{table}}$, avec

$$A_{\text{table}} = \frac{M_{\text{utable}}}{\sigma_{st}(d - h_1/2)} \quad \text{et} \quad A_{\text{ame}} = \frac{M_u - M_{\text{utable}}}{\sigma_{st}d(1 - 0.4\alpha_u)}$$

A l'ELS A l'ELS le problème est un peu plus complexe puisque les contraintes dans le béton varient linéairement. Ainsi, on ne peut pas connaître a priori la valeur de la résultante du béton comprimé qui dépend de la position de l'axe neutre y_1 . Pour résoudre ce problème, on décompose la résultante des contraintes de compression du béton en deux résultantes fictives : N_{bc1} et N_{bc2} comme indiqué sur la Figure 35. N_{bc1} est la résultante de la poutre fictive rectangulaire équivalente et N_{bc2} est la partie reprise par le béton fictif sous la table de compression. En notant K la pente de la droite des contraintes dans la section $\sigma(y) = Ky$, on a :

$$\begin{cases} N_{bc1} = \frac{1}{2}Kby_1^2 & \text{s'appliquant en } \frac{2}{3}y_1 \\ N_{bc2} = \frac{1}{2}K(b - b_0)(y_1 - h_1)^2 & \text{s'appliquant en } \frac{2}{3}(y_1 - h_1) \end{cases}$$

Les équations de l'équilibre s'écrivent alors :

$$\begin{cases} N_{bc1} - N_{bc2} - A_s\sigma_{st} = 0 & \text{selon } N \\ \frac{2}{3}y_1N_{bc1} - \frac{2}{3}(y_1 - h_1)N_{bc2} + (d - y_1)A_s\sigma_{st} = M_{ser} & \text{selon } M \text{ sur l'AN} \end{cases}$$

De plus, comme pour le calcul d'un section rectangulaire, on adoptera $\sigma_{st} = \bar{\sigma}_{st}$ pour minimiser la section d'acier. Comme pour les sections rectangulaires, l'équation de compatibilité des déformations fournit une équation supplémentaire reliant les contrainte via la pente K de la droite des contraintes $\sigma_{st} = nK(d - y_1)$ et $\sigma_{bc\max} = Ky_1$. On a donc trois inconnues y_1 , $\sigma_{bc\max}$ et A_s pour trois équations, et on peut résoudre ce système. On prendra garde de vérifier en fin de calcul que $\sigma_{bc\max} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 0.6f_{cj}$.

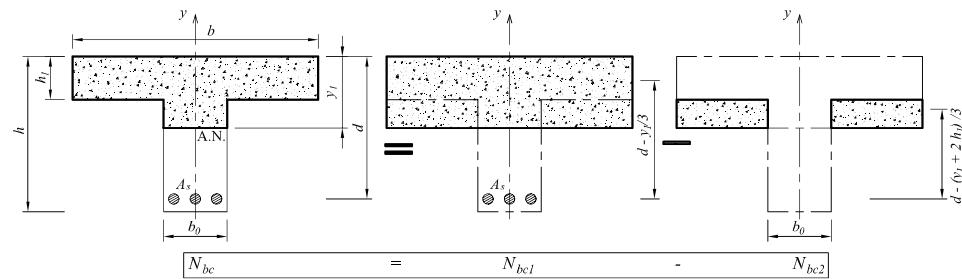


Fig. 35 : Principe du calcul de la section d'acier pour une poutre en T à l'ELS : la résultante des contraintes de compression est calculée comme la différence des contraintes s'appliquant sur une surface $b \times y_1$ en $2y_1/3$ et celles s'appliquant sur une surface $(b - b_0) \times (y_1 - h_1)$ en $2(y_1 - h_1)/3$.

4.5 Condition de non fragilité

La condition de non fragilité conduit à placer une section minimum d'armatures tendues pour une dimension de coffrage donnée. Une section de béton armé est considérée comme non fragile si le moment fléchissant entraînant la fissuration de la section de béton conduit à une contrainte dans les aciers au plus égale à leur limite d'élasticité garantie (A.4.2). On évalue la sollicitation de fissuration en considérant la section de béton seul soumise à une contrainte normal variant de façon linéaire sur toute la section et en limitant les contraintes de traction à f_{tj} .

En flexion simple, pour une poutre rectangulaire de dimension $b \times h$, la contrainte maximale de traction vaut :

$$\sigma_{bt_{max}} = \sigma_b\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{M_{fiss}}{I_b} \frac{h}{2} = -f_{tj},$$

où $I_b = bh^3/12$ est le moment quadratique de la section de béton non armé non fissuré. On en déduit :

$$M_{fiss} = \frac{f_{tj}bh^2}{6}.$$

La condition de non fragilité suppose que lorsque la section de béton armé est soumise à M_{fiss} , alors la contrainte dans les aciers vaut au plus f_e , soit comme le moment dans la section est égale à :

$$M = A_s f_e z_b,$$

on obtient la relation suivante donnant la section minimale d'acier vérifiant la condition de non fragilité :

$$\frac{f_{tj}bh^2}{6} = A_{min} f_e z_b.$$

Si, de plus, on suppose que $z_b \approx 0.9d \approx 0.9^2h$, la condition de non fragilité s'écrit (A.4.2.2) :

$$\frac{A_{min}}{bd} = 0.23 \frac{f_{tj}}{f_e}.$$

4.6 Choix du dimensionnement

Le choix entre ELU et ELS pour dimensionner la section d'acier dépend du type de fissuration, comme indiqué sur la Figure 36.

Type de fissuration	Fissuration Peu Préjudiciable	Fissuration Préjudiciable	Fissuration Très Préjudiciable
Dimensionnement	ELU	ELU (ou ELS)	ELS
Vérification	ELS	ELS (ou ELU)	inutile

Fig. 36: Choix de l'état limite dimensionnant.

5 Sollicitation d'effort tranchant

5.1 Dimensionnement des sections sous sollicitation d'effort tranchant (A.5.1,2)

Tous les calculs sont menés à l'ELU.

5.1.1 Contrainte tangente conventionnelle (A.5.1,1)

La contrainte tangente conventionnelle utilisée pour les calculs relatifs à l'effort tranchant est définie par :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d},$$

où V_u est l'effort tranchant à l'ELU dans la section, b_0 la largeur de l'âme et $d \approx 0.9h$ la position des aciers tendus.

5.1.2 ELU des armatures d'âme (A.5.1,23)

Le rapport de la section A_t sur l'espacement s_t des armatures transversales doit vérifier l'inégalité suivante:

$$\frac{A_t}{b_0 s_t} \geq \frac{\gamma_s (\tau_u - 0.3 f_{tj} k)}{0.9 f_e (\cos \alpha + \sin \alpha)},$$

où

- ✓ b_0 est la largeur de l'âme,
- ✓ f_e est la limite d'élasticité garantie des armatures transversales,
- ✓ γ_s le coefficient de sécurité partiel sur les armatures (en général $\gamma_s = 1.15$),
- ✓ α est l'angle d'inclinaison des armatures transversales ($\alpha = 90^\circ$ si elles sont droites),
- ✓ f_{tj} est la résistance caractéristique du béton à la traction à j jours,
- ✓ k est un coefficient qui vaut: - $k = 1$ en flexion simple,
- $k = 1 + 3\sigma_{cm}/f_{cj}$ en flexion composée avec compression (σ_{cm} contrainte moyenne),
- $k = 1 - 10\sigma_{tm}/f_{cj}$ en flexion composée avec traction (σ_{tm} contrainte moyenne),
- $k = 0$ si la fissuration est considérée très préjudiciable ou si il y a une reprise de bétonnage non traités,
- $k \leq 1$ si la reprise de bétonnage est munie d'indentations dont la saillie atteint au moins 5 mm.

En flexion simple, on utilise souvent la formule simplifiée (armatures droites, participation du béton en traction négligée) :

$$\boxed{\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{V_U}{0.9 d f_{su}} = \frac{V_U}{z_b f_{su}},}$$

5.1.3 ELU du béton de l'âme (A.5.1,21)

La contrainte tangente conventionnelle τ_u doit vérifier :

- dans le cas où les armatures sont droites :

$$\left| \begin{array}{l} \text{en FPP : } \tau_u \leq \min\left\{\frac{0.2f_{cj}}{\gamma_b}; 5 \text{ MPa}\right\} \\ \text{en FP et FTP : } \tau_u \leq \min\left\{\frac{0.15f_{cj}}{\gamma_b}; 4 \text{ MPa}\right\} \\ - \text{dans le cas où les armatures sont inclinées à } 45^\circ : \\ \tau_u \leq \min\left\{\frac{0.27f_{cj}}{\gamma_b}; 7 \text{ MPa}\right\} \end{array} \right.$$

Si les armatures sont disposées de façon intermédiaire ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$), il est loisible de procéder à une interpolation linéaire pour fixer la valeur de τ_u .

5.1.4 Dispositions constructives

Pourcentage minimal d'armatures transversales (A.5.1,22)

Il faut vérifier : $s_t \leq \min\{0.9d; 40 \text{ cm}\}$ et $\frac{A_t f_e}{b_0 s_t} \geq 0.4 \text{ MPa}$.

Diamètre des aciers transversaux (A.7.2,2)

Il faut vérifier : $\phi_t \leq \min\{\phi_l; \frac{h}{35}; \frac{b_0}{10}\}$.

5.1.5 Justification des sections d'appuis (A.5.1,3)

Appui de rive

Effort de traction dans l'armature inférieure :

On doit prolonger les armatures inférieures au delà du bord de l'appui et y ancrer une sections d'armatures longitudinales suffisantes pour équilibrer l'effort tranchant sur l'appui V_{u0} , soit :

$$A_{st \text{ ancrée}} \geq V_{u0}/f_{su}$$

Ancre des armatures inférieures :

On doit déterminer le type d'ancrage des armatures inférieures (droit ou par crochet). Pour cela, on calcule la longueur de l'ancrage droit nécessaire

$$l = V_{u0}/(n_s \pi \phi \tau_{su})$$

où n_s est le nombre de barres ancrées. Si $l \leq a$ alors un ancrage droit est suffisant, sinon il faut prévoir des crochets (voir la Figure 37 pour la définition de a).

Dimension de l'appui :

La contrainte de compression dans la bielle doit vérifier :

$$\sigma_{bc} = \frac{2V_{u0}}{ab_0} \leq 0.8 \frac{f_{cj}}{\gamma_b},$$

où la grandeur a est définie sur la Figure ??.

Appui intermédiaire

Ancre et bielle d'appui :

Il convient d'ancrer une section $A_{st} \geq (V_u + \frac{M_u}{0.9d})/f_{su}$ (à vérifier de chaque coté de l'appui ; M_u en valeur algébrique)

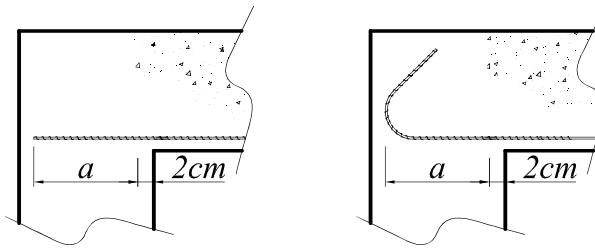


Fig. 37 : Définition de la largeur a de la bielle de compression au niveau d'un appui.

Pour la contrainte de compression, il faut effectuer la même vérification que pour un appui simple mais de chaque côté de l'appui (V_u à gauche et à droite de l'appui).

Surface de l'appui :

Si R_u est la réaction totale d'appui, il faut vérifier :

$$\frac{R_u}{\text{section d'appui}} \leq \frac{1.3 f_{cj}}{\gamma_b}.$$

5.1.6 Répartition des armatures transversales

Pour déterminer la section d'acier transversale et l'espacement des cadres, il faut procéder de la manière suivante (voir Figure 38) :

- Pour des raisons de mise en œuvre, les espacements s_t sont choisis dans la suite de Caquot (non obligatoire, conseillé) :

7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 13 - 16 - 20 - 25 - 35 - 40

- On se fixe la valeur de la section d'armature transversale A_t , ce qui revient dans les faits à choisir le diamètre des armatures transversales (avec $\phi_t \approx \phi_l/3 < \text{Min}\{h/35, b_0/10, \phi_l\}$). Pour des facilités de mise en œuvre, on placera des cadres identiques sur toute la travée.
- On détermine l'espacement $s_{t0} = z_b f_{su} A_t / V_u$ sur l'appui, et le premier cadre est placé à $s_{t0}/2$ du nu de l'appui.
- On détermine la répartition des armatures transversales suivantes de façon à avoir un effort tranchant résistant $V_{uR}(x)$ qui enveloppe la courbe de l'effort tranchant à reprendre $V_u(x)$. Pour cela, on peut procéder graphiquement sur le diagramme de l'effort tranchant en reportant les valeurs des efforts tranchants résistants $V_{uR_i} = z_b f_{su} A_t / s_{ti}$ pour les différents espacements s_{ti} de la suite de Caquot supérieurs à s_{t0} . On répète autant de fois que nécessaire l'espacement s_{ti} , jusqu'à pouvoir adopter l'espacement suivant s_{ti+1} dans la suite de Caquot (voir exemple ci-dessous). On doit par ailleurs vérifier que l'espacement maximal reste inférieur à $\text{Min}\{0.9d; 40cm; A_t f_e / (0.4b_0)\}$.

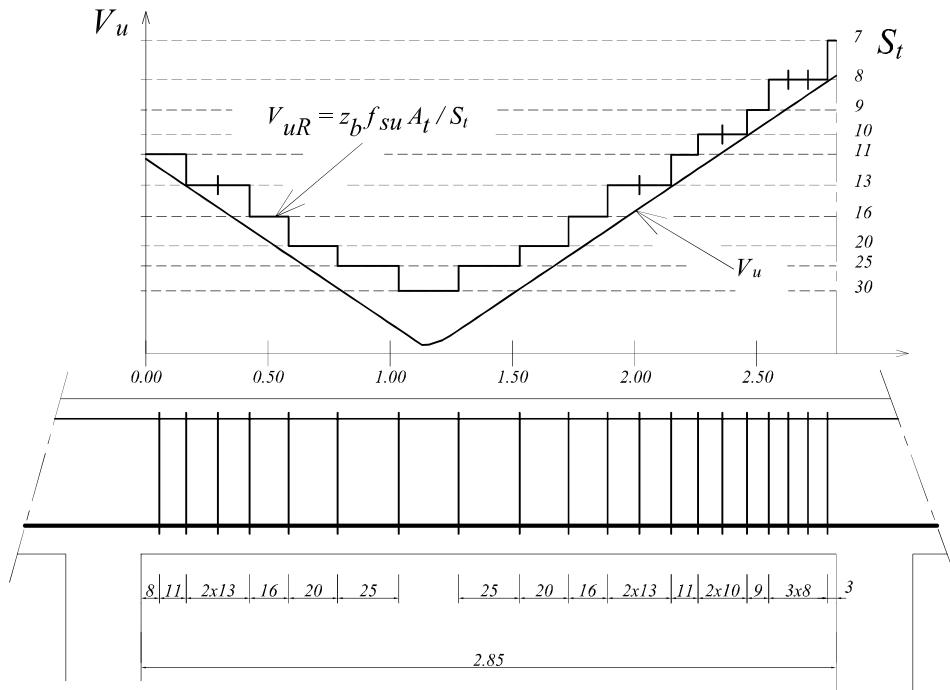


Fig. 38 : Exemple de tracé de la répartition des cadres dans une poutre en fonction de la courbe enveloppe de l'effort tranchant.

- Pour une travée, la cotation de l'espacement des cadres se fait à partir des deux nus d'appui, ce qui permet de ne pas coté l'espacement central qui, a priori, peut ne pas comporter un nombre entier de centimètres.

5.2 Vérifications diverses liées à l'existence de l'effort tranchant

5.2.1 Entraînement des armatures (A.6.1,3)

La brusque variation de la contrainte de cisaillement longitudinal au niveau de l'armature tendue peut conduire à un glissement de la barre par rapport au béton. Il convient donc de s'assurer que l'effort tranchant résultant V_u est équilibré par l'adhérence se développant au contact acier-béton pour les différentes armatures isolées ou paquets d'armatures.

Chaque armature isolée (ou paquet d'armatures) d'aire A_{si} et de périmètre utile u_i reprend une fraction A_{si}/A_s de l'effort tranchant, avec A_s la section totale des aciers longitudinaux tendus. L'effort normal dans l'armature i vaut donc :

$$N_{sti} = \frac{A_{si}}{A_s} V_u.$$

Cet effort de traction N_{sti} doit être équilibré par la contrainte d'adhérence d'entraînement τ_{se} entre l'armature et le béton sur une longueur z_b (hypothèse

du fonctionnement selon un treillis de Ritter-Mörsch), soit :

$$\tau_{se} z_b u_i = \frac{A_{si}}{A_s} V_u,$$

où le périmètre utile u_i est défini sur la Figure 39.

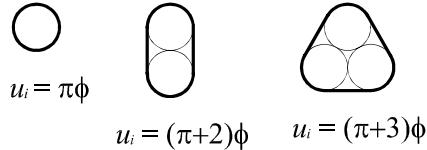


Fig. 39: Définition du périmètre utile d'un paquet de barres.

Il faut vérifier pour chaque paquet de barres que la contrainte d'adhérence τ_{se} reste inférieure à la valeur limite ultime $\tau_{se,u}$ (A.6.1.3):

$$\tau_{se} = \frac{V_u}{0.9d u_i} \frac{A_{si}}{A_s} \leq \tau_{se,u} = \Psi_s f_{tj}, \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} - \Psi_s = 1 \text{ pour les ronds lisses,} \\ - \Psi_s = 1.5 \text{ pour les aciers HA.} \end{array} \right.$$

5.2.2 Décalage de la courbe du moment fléchissant (A.4.1,5)

La règle du décalage tient compte de l'inclinaison à $\approx 45^\circ$ des bielles de béton comprimée : l'effort de traction N_s dans les aciers est constant sur une longueur z_b (fonctionnement simplifié selon un treillis de Ritter-Mörsch comme décrit sur la Figure 40). Par conséquent, l'effort agissant dans l'armature doit être évalué en prenant en compte le moment fléchissant agissant à une distance z_b de la section considérée.

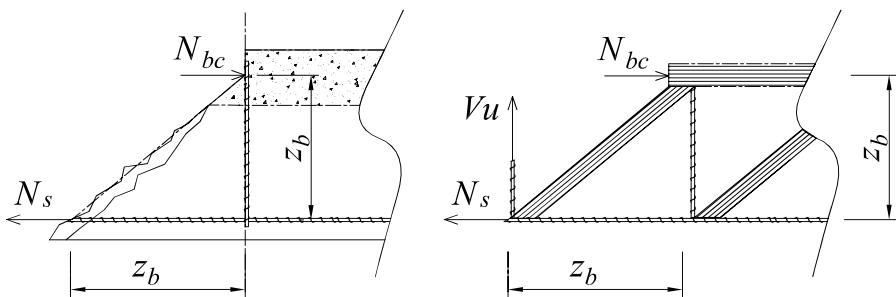


Fig. 40 : Fonctionnement de la section de béton armé selon un treillis de Ritter-Mörsch.

Pour tenir compte de ce décalage, le BAEL propose de décaler horizontalement de $0.8h$ ($z_b \approx 0.9d$ et $d \approx 0.9h$) dans le sens défavorable la courbe des moments fléchissants, ce qui revient à rallonger de $0.8h$ les deux cotés des aciers longitudinaux.

5.3 Règles des coutures généralisées (A.5.3)

5.3.1 Règle généralisée

Tout plan soumis à un effort de cisaillement doit être traversé par des armatures de couture totalement ancrées de part et d'autre de ce plan, faisant un angle d'au moins 45° avec lui et inclinées en sens inverse de la direction probable des fissures du béton. Si les actions tangentes sont susceptibles de changer de sens, les armatures de couture doivent être normales au plan sur lequel s'exercent les actions.

5.3.2 Section d'acier de couture

Considérons un élément d'aire $dP = p.dx$ du plan $[P]$, de largeur dx et de profondeur p , situé entre deux fissures et traversé par une armature de couture. Le plan $[P]$ est supposé soumis à un effort de cisaillement g par unité de longueur et à une contrainte uniforme de compression (ou traction) σ_u perpendiculairement à $[P]$ (voir Figure 41).

L'élément d'aire dP est donc soumis aux efforts suivants :

- un effort de cisaillement $g.dx$ contenu dans $[P]$,
- un effort de compression $p.dx.\sigma_u$ normal à $[P]$,
- un effort de compression dF_{bc} incliné de β par rapport à $[P]$ provenant des bielles de béton comprimé,
- un effort de traction dF_{st} incliné de α par rapport à $[P]$ provenant des armatures de couture.

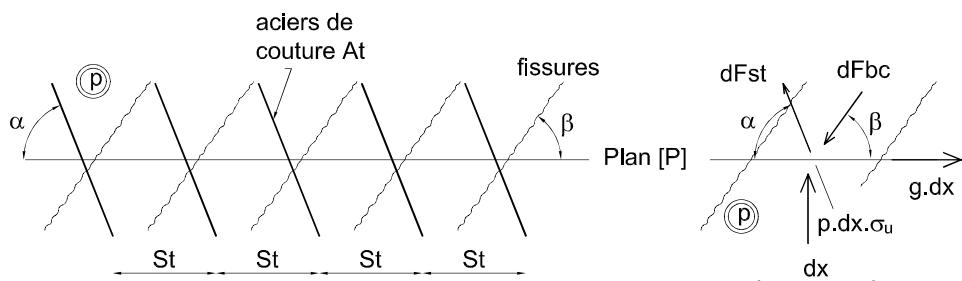


Fig. 41: Equilibre d'une surface élémentaire du plan $[P]$.

La projection de ces efforts sur $[P]$ et perpendiculairement à $[P]$ conduit aux deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} dF_{st} \sin(\alpha + \beta) = g \cdot dx \cdot \sin \beta - p \cdot \sigma_u \cdot dx \cdot \cos \beta \\ dF_{bc} \sin(\alpha + \beta) = g \cdot dx \cdot \sin \alpha + p \cdot \sigma_u \cdot dx \cdot \cos \beta \end{array} \right.$$

Les armatures de couture doivent équilibrer par mètre de longueur du plan $[P]$ un effort :

$$\frac{dF_{st}}{dx} = \frac{A_t}{s_t} \sigma_{st} = \frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Compte tenu du fait que $g = \tau_u \cdot p$, la résolution du système d'équations (5.3.2) conduit à :

$$\frac{A_t f_e}{p s_t \gamma_s} \frac{\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta}{\cos \beta} = \tau_u \tan \beta - \sigma_u$$

Pour $\beta = 45^\circ$, on obtient la même formule que celle proposée par le BAEL en A.5.3.12. Dans les cas habituellement rencontrés en BA, on a aussi $\alpha = 90^\circ$ (armatures de couture perpendiculaires au plan $[P]$), ce qui conduit à la formule simplifiée (commentaire du A.5.3.12) :

$$\boxed{\frac{A_t f_e}{p s_t \gamma_s} = \tau_u - \sigma_u}$$

Connaissant la contrainte de cisaillement τ_u , il est donc possible d'en déduire la section A_t et l'espacement s_t des aciers de couture. La valeur de τ_u dépend du type de plan $[P]$ que l'on considère (plan de l'âme, liaison hourdis/âme, liaison talon/âme, ...).

5.3.3 Liaison hourdis/âme

Considérons une poutre en T , dont la table de compression de largeur b est supposée symétrique. Il se produit dans cette table des contraintes de cisaillement parallèlement et perpendiculairement aux faces verticales de l'âme. Il y a donc un risque de séparation entre la table de compression et l'âme de la poutre. Les armatures de coutures (droites) doivent reprendre l'effort de cisaillement ($\sigma_u = 0$) :

$$\frac{A_t f_e}{h_1 s_t \gamma_s} = \tau_u,$$

où h_1 est l'épaisseur du hourdis.

Hypothèse : Les calculs suivants sont menés en supposant que les matériaux travaillent dans le domaine élastique (hypothèse des calculs aux ELS), puis transposés aux ELU sans modifications.

Isolons un demi-hourdis. Comme indiqué sur la Figure 42, ce demi-hourdis est en équilibre sous :

- des contraintes normales sur ses faces $MNPQ$ et $M'N'P'Q'$
- des contraintes de cisaillement sur sa face $MNM'N'$

Les contraintes normales en x sur $MNPQ$ ont pour résultante :

$$\int_{b_0/2}^{b/2} \int_{y_1-h_1}^{h_1} \sigma_{bc}(y) \cdot d y d z = \frac{M_{ser}}{I_1} \int_{b_0/2}^{b/2} \int_{y_1-h_1}^{h_1} y d y d z = \frac{M_{ser}}{I_1} m'_G$$

où m'_G est le moment statique de la section $MNPQ$ par rapport à l'axe neutre. Son expression est :

$$m'_G = \frac{b - b_0}{2} h_1 \left(y_1 - \frac{h_1}{2} \right)$$

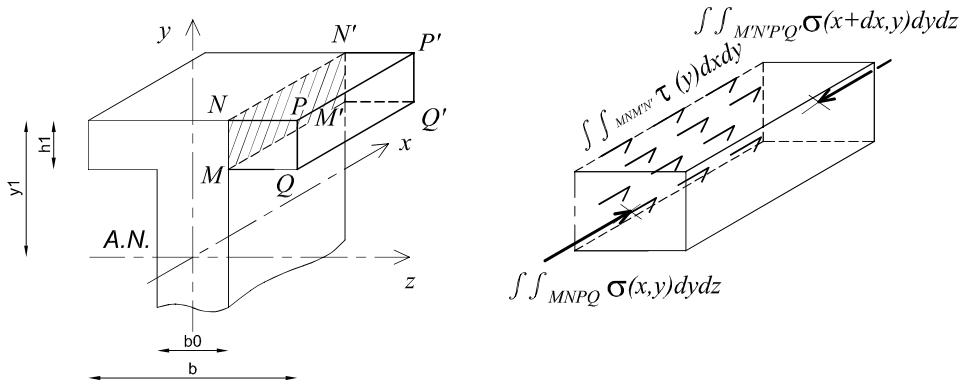


Fig. 42: Notations et équilibre d'un demi-hourdis d'une poutre en T.

Dans la section située en $x+dx$, de façon identique la résultante des contraintes normales sur $M'N'P'Q'$ vaut :

$$\frac{M_{ser} + d M_{ser}}{I_1} m'_G$$

En faisant **l'hypothèse complémentaire** que les contraintes de cisaillement sont uniformes sur le plan $MNM'N'$, l'équilibre du demi-hourdis conduit à :

$$\frac{M_{ser} + d M_{ser}}{I_1} m'_G - \frac{M_{ser}}{I_1} m'_G + \tau h_1 dx = 0$$

Hors, $d M_{ser}/dx = -V$, et l'expression précédente se simplifie :

$$\frac{V}{I_1} m'_G = \tau h_1$$

Dans le cas particulier où $y_1 = h_1$ (**Hypothèse** d'axe neutre confondu avec le nœud inférieur du hourdis), la définition du bras de levier z_b peut s'écrire $z_b = I_1/m'_1$, où m'_1 est le moment statique du hourdis ($m'_1 = bh_1(y_1 - h_1/2)$) et il vient (en remplaçant τ par τ_u et V par V_u) :

$$\tau_u = \frac{V_u}{h_1} \frac{m'_G}{I_1} = \frac{V_u}{h_1} \frac{m'_G}{m'_1} \frac{m'_1}{I_1} = \frac{V_u}{h_1} \frac{b - b_0}{2b} \frac{1}{z_b}$$

qui correspond à la formule du BAEL (commentaire de l'article A.5.3.2). On obtient alors la section d'acier de couture à mettre en place :

$$A_t \geq \frac{V_u}{z_b} \frac{b - b_0}{2b} \frac{s_t}{f_{su}}$$

Comme pour tous les calculs à l'effort tranchant, on adopte comme bras de levier $z_b = 0.9d$. L'espacement s_t des aciers de couture est généralement identique à celui des cadres de l'âme.

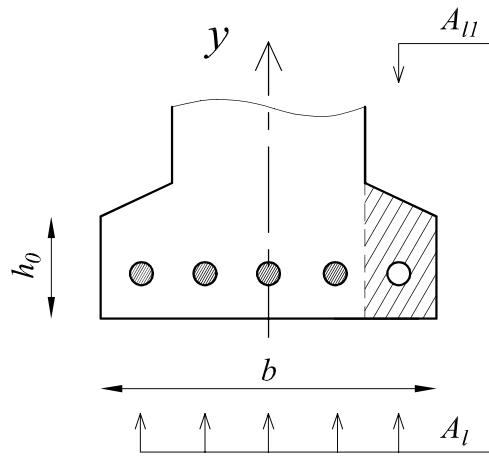


Fig. 43: Notations pour le calcul des aciers de couture à la liaison talon/âme.

5.3.4 Liaison talon/âme

Les notations utilisées sont définies sur la Figure 43. Le calcul est mené de façon identique à celui du hourdis, mais ici, comme le béton tendu est négligé, les moments statiques se réduisent à :

$m'_G = A_{l1}(d - y_1)$ pour un demi-talon contenant une section d'aciers longitudinaux A_{l1} ,

$m'_1 = A_l(d - y_1)$ pour le talon entier contenant la section d'aciers longitudinaux A_l .

En notant h_0 l'épaisseur du talon, l'équation (5.3.3) conduit à :

$$\tau_u = \frac{V_u}{h_0} \frac{m'_G m'_1}{m'_1 I_1} = \frac{V_u}{h_0} \frac{A_{l1}}{A_l} \frac{1}{z_b}$$

Cette formule est celle donnée dans le commentaire de l'article A.5.3.2 du BAEL.

La section d'acier de couture à mettre en place pour la liaison talon/âme est donnée par :

$$A_t \geq \frac{V_u}{z_b} \frac{A_{l1}}{A_l} \frac{s_t}{f_{su}}$$