Université Djilali BOUNAÂMA-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Niveau : $1^{ière}$ année LMD
Année : 2022-2023
Matière : Algèbre 2

Examen final

Jeudi 01-06-2023 - Durée : 1h :30

Exercice 1 (Questions de cours) : (8 pts)

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. 1

2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la famille $\{\sin, \cos, \exp\}$ est libre. 2

3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel E. Quand dit-on que :

a. F et G sont en somme directe ? **b.** F et G sont supplémentaires ? 1 + 1

4. Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que :

$$f \text{ est injetive} \Longleftrightarrow ker(f) = \{0_E\}.$$ 2

5. Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension $n, \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases de E. Expliquer comment trouver la matrice de passage de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ à la base $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$? 1

Exercice 2 : (5 pts)

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y + z + t = 0\right\},\ G = \left\{(2a, -a, 0, a) \in \mathbb{R}^4;\ a \in \mathbb{R}\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. 0,75 + 0,75
2. Démontrer que F et G sont en somme directe. 1,5
3. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $(x - 2a, y + a, z, t - a) \in F$. 1
4. En déduire que F et G sont supplémentaires. 1

Exercice 3 : (7 pts)

Soit $E = \mathbb{R}^3$, On note $\beta = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\epsilon_1) = -2\epsilon_1 + 2\epsilon_3,\ u(\epsilon_2) = 3\epsilon_2,\ u(\epsilon_3) = 4\epsilon_3 - 4\epsilon_1.$$

1. Écrire l'image $u(v)$ d'un vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$. 1
2. Écrire la matrice de u dans la base canonique. 1
3. Déterminer une base de $\ker(u)$. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ? 1 + 0,5 + 0,5
4. Déterminer une base de $Im(u)$. Quel est le rang de u ? 1 + 0,5
5. Montrer que $E = \ker(u) \oplus Im(u)$. 1,5

Bonne chance

Dr. M^{ed} Houasni

Université Djilali BOUNAÂMA-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Niveau : 1^{ière} année LMD
Année : 2022-2023
Matière : Algèbre 2

Correction de l'examen final

Exercice 1 (Questions de cours) : (8 pts)

1., 3., 4., 5., Voir cours.
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la famille $\{\sin, \cos, \exp\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \sin + \beta \cos + \gamma \exp = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma \exp(x) = 0$, ce qui s'écrit aussi

$$\alpha \frac{\sin(x)}{\exp(x)} + \beta \frac{\cos(x)}{\exp(x)} + \gamma = 0.$$

On montre facilement en utilisant le théorème des gendarmes que

$$lim_{+\infty} \frac{\sin(x)}{\exp(x)} = lim_{+\infty} \frac{\cos(x)}{\exp(x)} = 0.$$

On en déduit que $\gamma = 0$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma \exp(x) = 0$. Si on fait $x = 0$ on obtient $\beta = 0$ et si on fait $x = \pi/2$, il vient que $\alpha = 0$. On a alors bien montré que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Exercice 2 : (5 pts)

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y + z + t = 0\right\},\ G = \left\{(2a, -a, 0, a) \in \mathbb{R}^4;\ a \in \mathbb{R}\right\}.$$

1. Montrons que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E :

on a : $F = Vect\left((-1,1,0,0);(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\right)$
et $G = Vect\left((2,-1,0,1)\right)$

2. Démontrons que F et G sont en somme directe :

Soit $(x, y, z, t) \in F \cap G$. Alors d'une part on a

$$x + y + z + t = 0$$

et d'autre part, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z, t) = (2a, -a, 0, a)$ On introduit ceci dans l'équation précédente, et on trouve

$$2a - a + 0 + a = 0 \iff 2a = 0 \iff a = 0.$$

Ainsi, $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ et on a $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ donc F et G sont en somme directe.

3. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, déterminons $a \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $(x - 2a, y + a, z, t - a) \in F$:

On a

$$\begin{aligned}(x - 2a, y + a, z, t - a) \in F &\iff x - 2a + y + a + z + t - a = 0\\ &\iff a = \frac{x + y + z + t}{2}.\end{aligned}$$

4. On déduit que F et G sont supplémentaires :
   Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et posons $a = (x + y + z + t)/2$. Posons également $(x', y', z', t') = (x - 2a, y + a, z, t - a)$. Alors d'après la question précédente, $(x', y', z', t') \in F$. On sait aussi que $(2a, -a, 0, a) \in G$ et que

$$(x, y, z, t) = (x', y', z', t') + (2a, -a, 0, a).$$

   Ainsi, on a prouvé que $(x, y, z, t) \in F + G$ et donc que $F + G = E$. En utilisant le résultat de la première question, on conclut que F et G sont supplémentaires.

Exercice 3 : (7 pts)

Soit $E = \mathbb{R}^3$, on note $\beta = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\epsilon_1) = -2\epsilon_1 + 2\epsilon_3, \; u(\epsilon_2) = 3\epsilon_2, \; u(\epsilon_3) = 4\epsilon_3 - 4\epsilon_1.$$

1. L'image $u(v)$ d'un vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$:
   On commence par calculer $u(x, y, z)$. On a

$$u(x, y, z) = u(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3)$$

   soit

$$u(x, y, z) = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z).$$

2. La matrice de u dans la base canonique :
   On écrit en colonne $u(\mathcal{E}_i)$. On trouve

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Une base de $\ker(u)$. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
   On a donc

$$(x, y, z) \in \ker(u) \iff \begin{cases} -2x - 4z & = 0 \\ 3y & = 0 \\ 2x + 4z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -2z \\ y & = 0 \\ z & = z \end{cases}$$

   On a donc $\ker(u) = \mathrm{vect}(-2, 0, 1)$ et le vecteur $(-2, 0, 1)$ est une base de $\ker(u)$. $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif, car on a alors

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif}.$$

4. Une base de $Im(u)$. Quel est le rang de u ?
   On sait, d'après le théorème du rang, que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension 2. On sait aussi que $\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} u$. Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ est une telle famille. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$ qui est de rang 2.

5. Montrons que $E = \ker(u) \oplus Im(u)$:
   Il suffit de montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, avec les calculs réalisés précédemment, il suffit de voir que la famille $\big((-2, 0, 1), (-2, 0, 2), (0, 3, 0)\big)$ est une famille libre. C'est très facile