Licence MIASHS 1$^{\text{ère}}$ année Mathématiques S2 (MI005AX)

Chapitre III — Les Déterminants avec détermination !

emmanuel___bureau GS256___tél : 05 61 50 48 93___hallouin@univ-tlse2.fr___www.math.univ-toulouse.fr/~hallouin/eh-L1-S2-MIASHS.html___**hallouin**

1 Qu'est-ce que le déterminant d'une matrice ?

Nous généralisons ici la notion de déterminant que vous connaissez déjà en dimension 2 et 3. La définition que nous présentons, par récurrence, n'est pas la définition «officielle». Cette dernière, plus structurelle et sûrement plus satisfaisante, nécessite l'introduction de nouvelles notions qu'il serait trop long de présenter ici. D'où le choix d'une définition «alternative» plus calculatoire. Rassurez vous les deux définitions sont bien équivalentes !

Rappelons la définition du **déterminant** d'une matrice carrée de taille 2 ou 3 que vous avez vue au semestre dernier :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Si M désigne la matrice, on note aussi $\det(M)$ ce déterminant. Remarquons que le déterminant 3×3 peut se ré-écrire :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Le déterminant 3×3 peut donc se ramener au calcul de plusieurs déterminants 2×2 combinés de façon adéquate. En fait il en est de même du déterminant 2×2, qui se ramène au calcul de plusieurs déterminants 1×1 combinés de la même façon adéquate. Encore faut-il définir ce qu'est un déterminant 1×1 ; rien de plus simple puisque, par définition, on pose $|a_{11}| = a_{11}$. Avec cette définition, la déterminant 2×2 se ré-écrit :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}|.\end{aligned}$$

En fait ceci n'est que le pâle reflet d'un phénomène général. Je serais tenté de vous laisser inventer vous même la définition d'un déterminant 4×4, puis $n \times n$. Mais bon, un soupçon de conscience professionnelle m'oblige à n'en rien faire. Tout d'abord, quelques notations.

Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice **carrée** de taille $n \geqslant 2$. On lui associe n^2 matrices **carrées** de taille $(n-1)$: pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note M_{ij} la matrice obtenue à partir de M en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Voici les neuf matrices 2×2 associées à une matrice 3×3 :

$$M_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$M_{13} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \qquad M_{21} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad M_{32} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$M_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Tout est prêt pour définir le déterminant par récurrence.

Définition 1.1. *Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille $n \geqslant 1$. On définit son* ***déterminant****, noté* $\det(M)$*, comme suit. Si $n = 1$, c'est-à-dire si $M = (a_{11})$, on pose* $\det(M) = a_{11}$ *; si $n > 1$, alors on pose :*

$$\begin{aligned} \det(M) &= a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + \cdots + (-1)^n a_{1\,n-1} \det(M_{1\,n-1}) + (-1)^{n+1} a_{1\,n} \det(M_{1\,n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}) \end{aligned}$$

(les matrices M_{1j} sont carrées de taille $(n-1)$, d'où le caractère récursif de la définition).

Listons les principales propriétés satisfaites par le déterminant.

Proposition 1.2. *Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes :*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1\,j} + \mu b_{1\,j} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{n\,j} + \mu b_{n\,j} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1\,j} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{n\,j} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix}$$

pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$.

Preuve — Je laisse cette preuve au lecteur tout en lui conseillant de se convaincre du résultat pour $n = 2$ et 3 puis d'essayer de généraliser au cas n quelconque. $\square$

En particulier, un déterminant est nul dès lors qu'une des colonnes est identiquement nulle. Il y a d'autre cas où un déterminant s'avère nul, comme par exemple :

Proposition 1.3. *Le déterminant d'une matrice est nul dès lors que deux colonnes de cette matrice sont identiques.*

La preuve de cette proposition nécessite deux résultats intermédiaires.

Lemme 1.4. *Le déterminant d'une matrice est nul dès lors que deux colonnes consécutives de cette matrice sont identiques.*

Preuve — Montrons le résultat par récurrence sur la taille n du déterminant. C'est vrai pour $n = 2$ comme nous l'avons déjà vu. Supposons que cela soit vrai pour les déterminants de taille $(n-1)$ et considérons un déterminant de taille n. Supposons pour fixer les idées que les deux premières colonnes sont identiques (les autres cas se traitent de la même façon). Par définition du déterminant, on a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,1} & a_{n\,3} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,3} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix} - a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,3} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} & a_{24} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{n\,1} & a_{n\,4} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1\,n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{n\,1} & a_{n\,3} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}$$

Les deux premiers termes de la somme s'annulent ; quant aux autres, ils sont tous nuls par hypothèse de récurrence. □

Lemme 1.5. *Un déterminant change de signe lorsque l'on permute deux colonnes consécutives.*

Preuve — La preuve se fait encore par récurrence. Une bonne façon de voir si vous avez compris la précédente preuve, c'est d'essayer de faire celle-ci. C'est la même à quelques détails près ! □

Preuve de la proposition 1.3 — En permutant, éventuellement plusieurs fois, des colonnes consécutives, on se ramène au cas où les deux colonnes identiques sont consécutives ; ce faisant seul le signe du déterminant a peut-être été modifié. On conclue en utilisant le lemme 1.4. □

Dans les énoncés précédents, prééminence a été donnée aux colonnes des déterminants au détriment des lignes. Pourtant, il n'y a pas lieu de le faire. En effet, tous les résultats de cette section sont encore vrais quand on remplace le mot *colonne* par le mot *ligne*. On peut retenir la maxime :

> *«Pour ce qui concerne les déterminants, tout ce qui est vrai pour les lignes l'est aussi pour les colonnes».*

Pour établir ce phénomène, on fait appel à un artifice : **la transposée** d'une matrice. Si $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice carrée d'ordre n, sa transposé, noté ${}^tM$, est la matrice obtenue en symétrisant les coefficients de M par rapport à la diagonale qui part du coin en haut à gauche pour descendre vers le coin en bas à droite. Un petit exemple pour lever tout équivoque :

$$\text{Transposée de la matrice } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, les colonnes de la matrice M deviennent les lignes de sa transposée.

Proposition 1.6. *Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée : si $M \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\det(M) = \det({}^tM)$.*

Non preuve — C'est le point faible de la définition du déterminant choisie : elle ne permet pas d'établir facilement l'égalité $\det(M) = \det({}^tM)$. La seule façon de faire que je connaisse est de retrouver, à partir de la définition 1.1, la définition plus structurelle de laquelle on déduit assez facilement l'égalité souhaitée. Je ne le ferai pas et renvoie le lecteur pointilleux à l'ouvrage de Grifone, théorème 4.12 page 116. □

En remplaçant une matrice par sa transposée, on montre que :

Proposition 1.7. *Les énoncés 1.2, 1.3, 1.4, et 1.5 sont encore vrais quand on remplace le mot* ***colonne*** *par le mot* ***ligne****.*

Une dernière formule concernant les déterminants ; je l'admets.

Proposition 1.8. *Soit M et N deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ alors* $\det(M \times N) = \det(M) \times \det(N)$ *(noter que le premier produit est un produit de matrices tandis que le second est un produit de scalaires).*

Corollaire 1.9. *Le déterminant d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$* ***inversible*** *est non nul et on a* $\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$ *(où le premier inverse est celui d'une matrice tandis que le second est celui d'un scalaire).*

Preuve — Notons Q l'inverse de P est inversible, si bien que $PQ = I_n$. En prenant le déterminant de chaque côté, on en déduit que $\det(PQ) = \det(I_n) = 1$ et d'après la proposition 1.8, il vient $\det(P)\det(Q) = 1$. □

2 Comment on calcule un déterminant ?

La façon la plus intelligente pour calculer un déterminant est de s'aider des deux propositions qui suivent.

Proposition 2.1. *Un déterminant n'est pas changé lorsque l'on ajoute à une de ses colonnes (respectivement lignes) une combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement lignes).*

Preuve — Pour ce qui concerne le résultat sur les colonnes, c'est une conséquence directe de la linéarité par rapport à chaque colonne (proposition 1.2) et du fait qu'un déterminant est nul quand deux de ses colonnes sont égales (proposition 1.3).

Quant au résultat sur les lignes, il résulte de celui sur les colonnes en remplaçant la matrice par sa transposée. □

Proposition 2.2. *Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille $n \geqslant 2$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a :*

$$\begin{aligned}\det(M) &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(M_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{i\,n} \det(M_{i\,n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i\,j} \det(M_{i\,j}).\end{aligned} \tag{$\heartsuit$}$$

De même, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a :

$$\begin{aligned}\det(M) &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(M_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{n\,j} \det(M_{n\,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i\,j} \det(M_{i\,j}).\end{aligned} \tag{$\diamondsuit$}$$

Preuve — Pour établir la formule $\heartsuit$, l'idée de la preuve est de se ramener au cas où $i = 1$. En effet, dans ce cas l'égalité souhaitée est vraie... par définition même du déterminant ! Pour ce faire, on permute les lignes en prenant veillant au fait que l'échange de deux lignes consécutives change le signe du déterminant comme c'est le cas pour les colonnes (lemme 1.5).

Quant à la formule $\diamondsuit$, elle résulte de la maxime du paragraphe précédent. Si on ne croit pas aux maximes, on utilise la transposée ! □

Définition 2.3 (Développement selon une ligne ou une colonne)**.** *L'opération qui consiste à décomposer le déterminant comme dans $\heartsuit$ s'appelle le* ***développement du déterminant selon la*** i***-ème ligne****. L'opération qui consiste à décomposer le déterminant comme dans $\diamondsuit$ s'appelle le* ***développement du déterminant selon la*** j***-ème colonne****.*

Évidemment, développer un déterminant selon une ligne ou une colonne est d'autant plus intéressant du point de vue des calculs que cette ligne ou colonne contient des coefficients nuls. En effet, chaque coefficient nul apporte une contribution nulle à la somme, ce qui diminue le nombres de déterminants de taille inférieure à calculer. Le cas le plus favorable est celui où tous les coefficients d'une ligne ou colonne sont nuls sauf un (s'ils le sont tous, on sait que le déterminant est nul et il n'y a plus aucun calcul à faire). La stratégie pour calculer efficacement un déterminant à la main est donc la suivante.

> *On choisit une ligne (ou une colonne) ; grâce à la proposition 2.1, on essaye de faire apparaître le plus de zéros possibles sur cette ligne (ou colonne) en lui ajoutant une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes) ; ensuite, grâce à la proposition 2.2, on développe selon cette ligne (ou colonne) ; puis on recommence avec les déterminants de taille inférieure qui sont apparus dans le développement.*

Exemple. — Voici un exemple de calcul de déterminant en suivant cette stratégie :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\
&= \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} && \text{développement selon la 1-ère ligne} \\
&= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\
&= 0 && \text{une colonne nulle.}
\end{aligned}$$

3 A quoi sert un déterminant ?

3.1 Le déterminant tient son rang

L'une des applications principales des déterminants est de *mesurer la liberté d'une famille*. On a déjà vu comment, grâce aux déterminants de taille 2×2 ou 3×3, il est facile de savoir si une famille constituée de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ ou de deux ou trois éléments de $\mathbb{R}^3$ est libre ou non. Ce phénomène se généralise très bien en dimension supérieure et c'est l'objet de cette section. Commençons par introduire une terminologie commode.

Soit M une matrice (non nécessairement carrée). On appelle **sous-matrice** ou **matrice extraite** de M toute matrice construite à partir de M en en sélectionnant des lignes et des colonnes. Par exemple de :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

on peut extraire les sous-matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$	sélection de la 2-ère ligne et des colonnes 1 et 3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	sélection de la 1-ère ligne et des trois colonnes
$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$	sélection des trois lignes et de la 1-ère colonne
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$	sélection des lignes 1 et 3 et des colonnes 2 et 3
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$	sélection des lignes et colonnes 1 et 3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	sélection des deux premières lignes et des trois colonnes

On appelle **mineur de taille** r ou **mineur** $r \times r$ d'une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ le déterminant d'une matrice **carrée** de taille r extraite de M ; pour qu'un tel mineur existe il faut que $r \leqslant \min\{m, n\}$.

Avec ce langage, le premier point de la caractérisation d'une famille liée pour une famille de deux éléments de $\mathbb{R}^3$, peut s'énoncer ainsi : *deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont liés si et seulement si tous les mineurs 2×2 de la matrice faite de la juxtaposition de ces deux vecteurs sont nuls.* Cela se généralise ainsi :

Théorème 3.1. *Soit $\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix}\right)$ une famille de r éléments de $\mathbb{R}^n$, avec $r \leqslant n$. Cette famille est :*

— *liée si et seulement si tous les mineurs $r \times r$ de la matrice :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}$$

sont nuls ;

— *libre si et seulement si au moins un de ces mineurs $r \times r$ est non nul.*

Preuve — Il suffit de montrer le premier point, le second s'en déduisant par contraposée.

Supposons la famille liée, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons, par exemple, que $\lambda_1 \neq 0$ alors :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} - \cdots - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix}$$

Montrons que le mineur $r \times r$ formé avec les r premières lignes est nul. Pour cela, posons $\mu_j = -\frac{\lambda_j}{\lambda_1}$ pour $2 \leqslant j \leqslant r$ et remplaçons la première colonne de ce mineur par son expression déduite de l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \sum_{j=2}^{r} \mu_j a_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=2}^{r} \mu_j a_{1j} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j=2}^{r} \mu_j \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{rj} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} && \text{(linéarité par rapport à la 1-ère colonne)} \\
&= 0 && \text{(déterminants avec2 colonnes identiques).}
\end{aligned}$$

La preuve de nullité des autres mineurs est identique.

La preuve nécessite un lemme préparatoire énoncé et prouvé ci-dessous. D'après ce lemme, si tous les mineurs de taille r sont nuls, alors cela fournit plusieurs relations linéaires nulles du type :

$$\delta_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n\,1} \end{pmatrix} + \cdots + \delta_r \begin{pmatrix} a_{1\,r} \\ \vdots \\ a_{n\,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

où chaque scalaire δ_j est un mineur de taille $(r-1)$ de la matrice. De plus tous les mineurs de taille $(r-1)$ apparaissent au moins une fois dans une des relations. De deux choses l'une.

• Ou bien l'un des mineurs de taille $(r-1)$ est non nul auquel cas, le lemme ci-dessous permet d'exhiber une relation linéaire nulle non triviale entre les r éléments de $\mathbb{R}^n$. Cela prouve que la famille est liée.

• Ou bien tous les mineurs de taille $(r-1)$ sont nuls auquel cas toutes les relations linéaires nulles fournies par le lemme ci-dessous sont triviales. Qu'à cela ne tienne, puisque tous les mineurs de tailles $(r-1)$ sont nuls, on va montrer que les $(r-1)$ premiers éléments forment une famille liée, ce qui montre qu'il en est de même des r éléments. Pour cela, on recommence le même raisonnement. Si à chaque fois, on conclue que tous les mineurs de taille un de moins sont encore nuls, on recommence. Ce processus s'arrête soit quand on a trouvé une combinaison linéaire nulle non triviale entre quelques uns des premiers éléments, soit quand on a conclu au fait que tous les mineurs de taille 1 de la matrice où il ne reste plus que deux colonnes sont nuls. Cela veut dire qu'un des éléments de la famille est nul. Dans tous les cas, cela montre que la famille de départ est liée. □

Lemme 3.2. *Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant r}} \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ avec $2 \leqslant r \leqslant n$. Si tous les mineurs de taille r de cette matrice sont nuls, alors on est en mesure d'exhiber plusieurs combinaisons linéaires nulles des colonnes de cette matrice dont les scalaires sont tous des mineurs $(r-1)\times(r-1)$ de la matrice. De plus, chacun de ces mineurs apparaît au moins une fois dans une des combinaisons linéaires ainsi construites.*

Preuve — Choisissons les $(r-1)$ lignes parmi les n. Pour fixer les idées, on choisit les $(r-1)$ premières. Alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a :

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{i\,r} \\ a_{11} & \cdots & a_{1\,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r-1\,1} & \cdots & a_{r-1\,r} \end{vmatrix} = 0$$

pour $1 \leqslant i \leqslant r-1$, c'est dû au fait que deux lignes sont identiques, pour $i \geqslant r$, cela résulte de l'hypothèse sur la nullité des mineurs $r \times r$. Posons :

$$\delta_j \overset{\text{déf.}}{=} (-1)^{1+j} \times \left(\begin{array}{l} \text{le mineur de taille } (r-1) \text{ obtenu en sélectionnant les } (r-1) \\ \text{premières lignes et toutes les colonnes sauf la } j\text{-ème} \end{array} \right)$$

En développant selon la première ligne, on obtient les relations :

$$\delta_1 a_{i1} + \cdots + \delta_r a_{i\,r} = 0 \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Ceci étant vrai pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$, on en déduit la combinaison linéaire nulle suivante :

$$\delta_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n\,1} \end{pmatrix} + \cdots + \delta_r \begin{pmatrix} a_{1\,r} \\ \vdots \\ a_{n\,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En choisissant $(r-1)$ autres lignes, on obtient, avec le même raisonnement d'autre relations linéaires nulles faisant intervenir d'autre mineurs de taille $(r-1)$. Il n'est pas difficile de se convaincre du fait que l'on obtient ainsi plusieurs relations linéaires nulles et que chaque mineur de taille $(r-1)$ de la matrice de départ apparaît dans au moins une de ces combinaisons. $\square$

Remarques.
1. La démarche que l'on vient de suivre ne fait que généraliser celle déjà vue dans $\mathbb{R}^3$; on retrouve exactement les mêmes alternatives.
2. Il ne serait pas bien difficile de compter le nombre de relations linéaires que l'on obtient ; mais peu nous importe !

En particulier, quand on considère n éléments de $\mathbb{R}^n$, on obtient :

Corollaire 3.3. *Soit* $\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}\right)$ *une famille de n éléments de $\mathbb{R}^n$. On a les équivalences :*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \textit{la famille est liée ;}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \textit{la famille est une base.}$$

Exemples. — 1) La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$ est liée car $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$, tandis que la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 49 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 25 \\ 64 \end{pmatrix}\right)$ est une base car $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 9 & 16 & 25 \\ 36 & 49 & 64 \end{vmatrix} = -216 \neq 0$.
2) Le déterminant d'une matrice de passage est forcément non nul.

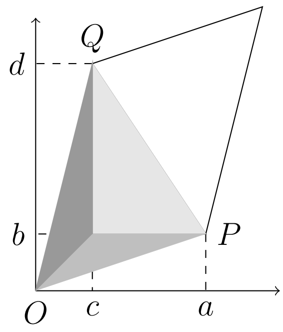
3.2 Le déterminant prend du volume

En valeur absolue, le déterminant est une quantité ayant une signification géométrique très forte : c'est une longueur en dimension $n = 1$, une aire en dimension $n = 2$, un volume en dimension $n = 3$ et un hyper-volume en dimensions supérieures. C'est facile à voir quand $n = 1$; nous allons nous contenter de montrer cette affirmation quand $n = 2$.

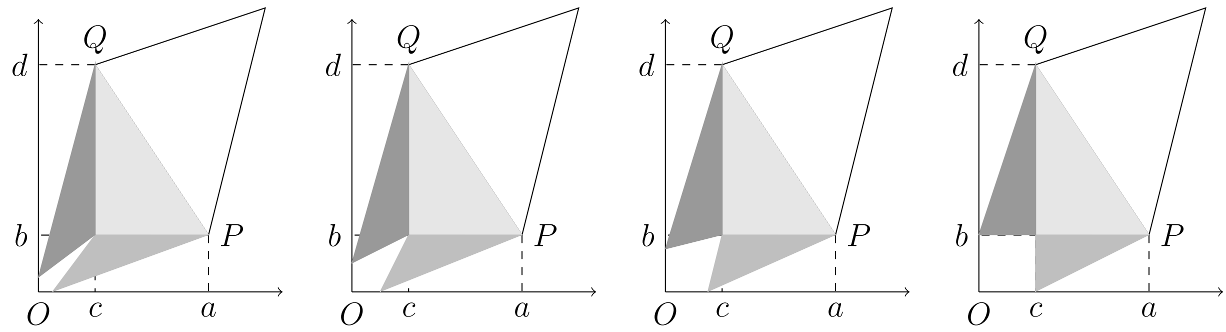
Proposition 3.4. *Plaçons dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. En valeur absolue, le déterminant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ est l'aire du parallélogramme dont deux côtés sont les segments $[OP]$ et $[OQ]$, où P est le point de coordonnées (a, b) et Q celui de coordonnées (c, d).*

Preuve — La preuve en images[1] ! L'aire cherchée n'est rien d'autre que le double de la somme des aires des trois triangles coloriés suivants :

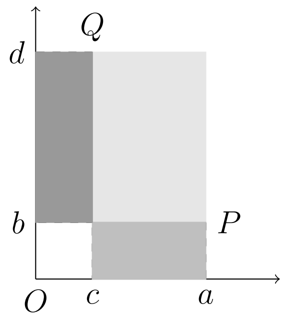
1. Sur le web, en cherchant bien, sûrement que vous allez trouver des images animées illustrant cette preuve. Peut-être même pouvez-vous trouver des images en 3D...



On rappelle que l'aire d'un triangle reste inchangée quand on fait bouger l'un de ses sommets en suivant une direction parallèle au côté opposé. Nous allons déformer les deux triangles les plus foncés en déplaçant le sommet O en suivant dans les deux cas la direction du côté opposé. Voici quelques instantanés ; notez que les aires des triangles coloriés restent inchangées.



L'aire du parallélogramme de départ est donc le double de la somme des aires des trois derniers triangles coloriés. C'est donc aussi la somme des aires des trois rectangles coloriés ci-dessous :



Sur ce dessin, il apparaît clairement que l'aire cherchée n'est rien d'autre que l'aire ad du grand rectangle réunion des trois coloriés plus le petit en bas à gauche, à laquelle on a retranché l'aire bc du dit petit rectangle en bas à gauche. Autrement dit, l'aire du parallélogramme vaut $ad - bc$, ce qu'il fallait montrer. $\square$

De la même façon, en valeur absolue, un déterminant 3×3 n'est rien d'autre que le volume du parallépipède rectangle dont trois côtés sont donnés par les segments $[OP], [OQ]$ et $[OR]$ où O désigne l'origine d'un repère orthonormé de l'espace et où P, Q, R sont les points dont les coordonnées sont données par les colonnes du déterminant.

Cette vision géométrique du déterminant nous permet de réinterpréter géométriquement les résultats concernant les caractérisations du caractère lié d'une famille d'éléments de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On comprend mieux pourquoi le déterminant est un outil de mesure de la liberté d'une famille. En effet, on sait bien que pour que l'aire d'un parallélogramme soit nulle, il faut et il suffit qu'il soit plat, c'est-à-dire (avec les notations précédentes) que les points O, P, Q soient alignés (contenus dans une même droite). Autrement dit, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ soient colinéaires, ce qui revient à dire que les éléments $\binom{a}{b}$ et $\binom{c}{d}$ sont liés dans $\mathbb{R}^2$.

De même, pour que le volume d'un parallépipède rectangle soit nul, il faut et il suffit que les points O, P, Q, R soient coplanaires (contenus dans un même plan). Autrement dit, il faut et il suffit que $\overrightarrow{OR}$ soit combinaison linéaire de $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$, ce qui revient à dire que les trois colonnes du déterminant forment une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

3.3 Le déterminant inverse la vapeur

Grâce au déterminant, on peut exprimer l'inverse d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ inversible. Pour cela, on utilise encore les matrices extraites de M ; on rappelle que M_{ij} désigne la matrice carrée de taille $(n-1)$ obtenue à partir de M en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Définition 3.5 (cofacteur & comatrice)**.** *Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Pour i et j compris entre 1 et n, on appelle (i,j)-ème* ***cofacteur*** *de la matrice M, et on note δ_{ij}, le scalaire défini par :*

$$\delta_{ij} \overset{\text{déf.}}{=} (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

On appelle ***comatrice****, et on note $\widetilde{M}$, la matrice carrée de taille n dont les coefficients sont les cofacteurs de M : $\widetilde{M} \overset{\text{déf.}}{=} (\delta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.*

Théorème 3.6. *Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a l'identité :*

$$M \times {}^t\widetilde{M} = \det(M) I_n,$$

où I_n désigne la matrice identité de taille n.

Preuve — Je me propose de faire la preuve pour $n = 3$ et je laisse le soin aux lecteurs de la généraliser à tout n (excellent exercice !). Il s'agit de vérifier que :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(M) & 0 & 0 \\ 0 & \det(M) & 0 \\ 0 & 0 & \det(M) \end{pmatrix},$$

en prenant soin de le faire le plus astucieusement possible pour faciliter la généralisation laissée aux lecteurs.

Il y a neuf vérifications à effectuer en tout. On distingue les trois vérifications concernant les coefficients diagonaux égaux à $\det(M)$, des autres.

• Pour les coefficients diagonaux, il s'agit de vérifier les égalités :

$$\begin{aligned} a_{11}\delta_{11} + a_{12}\delta_{12} + a_{13}\delta_{13} &= \det(M), \\ a_{21}\delta_{21} + a_{22}\delta_{22} + a_{23}\delta_{23} &= \det(M), \\ a_{31}\delta_{31} + a_{32}\delta_{32} + a_{33}\delta_{33} &= \det(M) \ ; \end{aligned}$$

elles sont toutes vraies, comme on s'en aperçoit en développant respectivement le déterminant de M par rapport à la 1-ère, 2-ème et 3-ème ligne.

• Vérifions, par exemple, la nullité du coefficient du produit en position $(1,2)$. Il s'agit de prouver que :

$$a_{11}\delta_{21} + a_{12}\delta_{22} + a_{13}\delta_{23} = 0.$$

C'est le cas, comme on peut s'en apercevoir en développant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

selon la première ligne. Notons que ce déterminant est bien nul, puisque ses deux premières lignes sont identiques. La nullité des autres coefficients se montre avec la même astuce. □

Corollaire 3.7. *Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est telle que* $\det(M) \neq 0$*, alors on a* $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\widetilde{M}$*.*

Cette identité, aussi explicite soit-elle, se prête peu aux calculs à la main (et même en machine) car le calcul des cofacteurs est très lourd. En pratique, cette formule ne permet de calculer l'inverse d'une matrice que pour $n = 2$ ou 3. En particulier, pour $n = 2$ et $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ telle que $\det(M) = ad - bc \neq 0$, on retrouve la classique formule de l'inverse, à savoir :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4 Déterminant d'un endomorphisme

Dans le titre de la section 1 figure l'adjectif «matriciel» entre parenthèses. La raison est que jusqu'à présent, nous n'avons parlé que de déterminants de matrices. Nous allons voir que l'on peut aussi définir le déterminant d'un endomorphisme.

Proposition 4.1. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u : E \to E$ un* ***endomorphisme****. Alors toutes les matrices de u dressées dans une base quelconque de E (avec le même choix de la base au départ et à l'arrivée) ont le même déterminant.*

Preuve — Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Il s'agit de prouver que :

$$\det(\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})) = \det(\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}')).$$

On utilise évidemment la formule du changement de bases, où l'on apprend que les deux matrices sont reliées par le relation :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}') = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \times \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

où $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. En prenant le déterminant de chaque côté, il vient :

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}')) &= \det\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \times \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right) \\
&= \det\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}\right) \times \det(\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})) \times \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) && \text{proposition 1.8} \\
&= \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} \times \det(\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})) \times \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) && \text{corollaire 1.9} \\
&= \det(\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})) \times \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) \times \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} && \text{les scalaires commutent} \\
&= \det(\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Il est donc légitime de définir :

Définition 4.2. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u : E \to E$ un* ***endomorphisme****. On appelle* ***déterminant*** *de u, et on note* $\det(u)$*, la valeur commune prise par n'importe quel déterminant d'une matrice de u dressée dans une base quelconque de E (avec le même choix de la base au départ et à l'arrivée).*