1- التوزيع ذي الحدين: *La distribution Binomial*

أ- تجربة (توزيع) بارنولي

هي كل تجربة تحتمل نتيجتها إمّا النجاح أو الفشل ونجربها مرّة واحدة لأن نرمي قطعة نقدية مثلا ونهتم بالحصول على *Fasse*.

نرمز لاحتمال النجاح بp وحتمال الفشل q ويساوي $q = 1\text{-}p$ ونكتب : المتغير العشوائي X الذي يخضع إلى توزيع معين: وقانون الاحتمال:

$$\boxed{X \nearrow B\,(1.p)}$$

$$P(X = x) = p^x\, q^{1-x} \qquad\qquad x = 0\,,1$$

$X = x$	0	1	$\sum$
$P(X=x)$	$1\text{-}p = q$	p	1

* توقع بارنولي: $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x_i\, P(X = x_i) = \sum_{x=0}^{1} x[p^x(1-p)^{1-x}]$$

$$= (0)\,(1\text{-}p) + (1)\,(p) = \boxed{p}$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \sum_{x=0}^{1} x^2\, P(X = x) - [E(X)]^2$$

$$= (0)(q) + (1)^2(p) - [\,p]^2$$

$$= p - p^2 = p\,(\,1 - p)$$

$$\boxed{V(X) = pq}$$

نفرض أننا نقوم بتكرار تجربة برنولي n مرة، كل مرة تحتمل نجاح أو فشل كما أن هذه التجارب **مستقلة عن بعضها البعض** وبالتالي احتمال النجاح p (بالمقابل احتمال الفشل q) يبقى ثابت من تجربة إلى أخرى.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثّل عدد مرات النجاح في n محاولة ونكتب:

$$X \nearrow B\,(n.p)$$

مثال: نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات ونهتم بالحصول على *fasse*

$X = x$	**الحالات الملائمة**	$P(X=x)$
0	*(Pile, Pile, Pile)*	q^3
1	*(F.P.P), (P.F.P), (P.P.F)*	$3pq^2$
2	*(P.F.F), (F.F.P), (F.P.F)*	$3p^2q$
3	*(F.F.F)*	P^3

$$X \nearrow B\,(n.p)$$

$$\boxed{P(X = x) = C_n^x\, p^x\, q^{n-x}}$$

$x = 0,1,\ \ldots\ldots\ldots,n$

توقع ذي الحدّين وثباته: $X \nearrow B\,(n.p)$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots\ldots\ldots.. + E(X_n)$$

$$= p + p + \ldots\ldots\ldots.. + p = np$$

$$\boxed{E(X) = np}$$

(X_i pour $i = 1\text{-}n$ مستقلة)

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(x_i)$$

$$= pq + pq + \ldots\ldots\ldots.. + pq$$

$$\boxed{V(X) = npq}$$

$E(X) = np = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}]$

$V(X) = npq = 3\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}]$

مثال2: في امتحان معين وضعت 4 إجابات لكلّ سؤال من بينها إجابة واحدة فقط صحيحة، أجاب طالب عشوائيا على عشرة (10) أسئلة من هذا النوع.

فما احتمال حصوله على 5 إجابات صحيحة على الأقلّ؟

X "عدد مرات الإجابة الصحيحة" التوزيع الاحتمالي لX

$X \nearrow B\ (n.p)$

$$P(X = x) = C_{10}^{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-x}$$

X= 0,1,……,10

$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \dots\dots\dots.. + p(X = 10)$

$P(X \geq 5) = C_{10}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{5} + C_{10}^{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{4} + \dots\dots\dots\dots + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}$

إذاكان السحب بالإرجاح يكون التوزيع ذي الحدين ويكون احتمال النجاح يكون معلوم.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X > 3) = P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4)$

$= 1 - P(X \leq 3).$

2- توزيع بواسون *Poisson*:

يهتم هذا التوزيع بوصف عدد مرات النجاح (عدد تكرارات حادث) لتجارب عشوائية معينة التي تقع ضمن فترة زمنية أو مساحة أو حجم أو منطقة محددة بمتوسط معلوم ويرمز له λ، على أن يكون احتمال النجاح يتناسب مع طول الفترة أو الحجم المعيّن.

نقول عن المتغير العشوائي الذي يمثل عدد تكرارات الحادث ضمن الوحدة المعينة أنه يتبع توزيعا بواسونيا ذو المعلمة λ وقانونه هو $X \nearrow P\ (\lambda)$

$$\boxed{P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}} \quad x = 0, 1, \dots\dots\dots$$

مثال1: متوسط عدد الزبائن الذين يدخلون أحد المحلات التجارية في الدّقيقة هو 3 زبائن ما احتمال أن يدخل 4 زبائن إلى هذا المحل خلال دقيقة معينة؟.

الحل:

X " عدد الزبائن الداخلين في الدّقيقة"

$X \nearrow P\ (\lambda=3)$

$$P(X=x)=e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^x}{x!}\ =\ e^{-3}\ \frac{3^x}{x!} \qquad x=0\ ,1,\dots\dots$$

$$P(X=4)=e^{-3}\ \frac{3^4}{4!}=0{,}16$$

مثال2:

إذا علمت أن متوسط عدد حوادث السيارات بمنطقة معينة هو 5 حوادث في اليوم.

ما احتمال عدم وقوع أي حادث خلال يوم معين؟

ما احتمال وقوع 3 حوادث على الأكثر خلال يوم معين؟

ما احتمال وقوع حادث على الأقل خلال يوم معين؟

ما احتمال وقوع أكثر من حادثين خلال يوم معين؟

ما احتمال وقوع 10 حوادث خلال أسبوع معين؟

الحل:

X "عدد حوادث السيارات في اليوم"

* التوزيع الاحتمالي لX: $X \nearrow P\ (\lambda=5)$

$$P(X=x)=e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^x}{x!}\ =\ e^{-5} \qquad x=0\ ,1,\dots\dots$$

$$P(X=0)=e^{-5}\ \frac{5^0}{0!}=e^{-5}$$

$$P(X\le 3)=\ P(X=0)+\ P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$=e^{-5}\ +e^{-5}\ \frac{5^1}{1!}+e^{-5}\ \frac{5^2}{2!}+e^{-5}\ \frac{5^3}{3!}$$

$$P(X\ge 2)=\ 1-P(X<2)$$

$$=1-P(X\le 1)$$

$$P(X\ge 2)=1-[P(X=0)+\ P(x=1)]$$

$$=1-\ [e^{-5}\ +5e^{-5}\ ]$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$
$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$
$$= 1 - \left[e^{-5} + 5e^{-5} + e^{-5}\frac{5^2}{2!}\right]$$

Y "عدد حوادث السيارات في الأسبوع"

$\lambda = 5 \times 7 = 35$ $\qquad$ $Y \nearrow P\,(35)$

$$P(Y = y) = e^{-35}\frac{35^y}{y!} \qquad y = 0,1, \dots$$

$$P(Y = 10) = e^{-35}\frac{35^{10}}{10!}$$

3- التوزيع الهندسي الزائدي *Happer géométrique*

نعتبر مجتمع عدد عناصره N عنصر من بينهم N_1 عنصر يحملون صفة معينة وN_2 عنصر لا يحملون هذه الصفة $(N_1 + N_2 = N)$

نسحب من هذا المجتمع عينة ذات n عنصر ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل "عدد العناصر التي تحمل الصفة المسحوبة" إذا كان سحب بدون إرجاع فإنّ هذا المتغير X سوف يتبع توزيعا **هندسيا زائدا**.

ونكتب $\qquad$ $X \nearrow H\,(n\,; N_1, N_2)$

وقانونه الاحتمالي هو:

$$\boxed{P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x} \,.\, C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}}$$

ومن خصائصه:

$$E(X) = np \qquad (p = \frac{N_1}{N})$$

$$V(X) = npq.\left(\frac{N - n}{N - 1}\right)$$

مثال1: صندوق يحتوي على 10 كريات بيضاء و5 حمراء، فسحب من هذا الصندوق بالصدفة 3 كريات بدون إرجاع، نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

ما هو التوزيع الاحتمالي لX؟

احتمال سحب كريتين حمراوتين؟

العدد المتوقع للكريات الحمراء المسحوبة؟

X "عدد الكريات الحمراء المسحوبة" $X \nearrow H\ (0,3\ ;0,5\ ;10)$

$$P(X=x)=\frac{C_5^x.\ C_{10}^{3-x}}{C_{15}^3}$$
$$P(X=2)=\frac{C_5^2.\ C_{10}^1}{C_{15}^3}$$
$$E(X)=\ np=3\left(\frac{5}{15}\right)=1$$
$$V(X)=\ npq\ \left(\frac{N-n}{N-1}\right)=3\left(\frac{5}{15}\right)\left(\frac{10}{15}\right)\left(\frac{15-3}{15-1}\right)$$

مثال2: تتكون هيئة إدارية من 7 أعضاء دائمين و5 غير دائمين نختار من هذه الهيئة 8 أعضاء لتكوين لجنة.

أحسب احتمال أن لا يقلّ عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة عن 3؟

ما هو العدد المتوقع للأعضاء الدائمين في اللجنة؟

X "عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة".

التوزيع الاحتمالي لX: $X \nearrow H\ (8\ ;7\ ,5)$

$$P(X=x)=\frac{C_7^x.\ C_5^{8-x}}{C_{12}^8}$$

$x = 3,4,\ldots 7$

$P(X\geq 3)=\ 1$ حادث أكيد

$$E(X)=8\left(\frac{7}{12}\right)=4{,}66\ \approx 5.$$

4) التوزيع الطبيعي La distribution Normale

أ-تعريف:

نقول عن المتغير العشوائي X أنه يخضع لتوزيع طبيعي إذا كانت دالة كثافة احتماله تأخذ الشكل التالي:

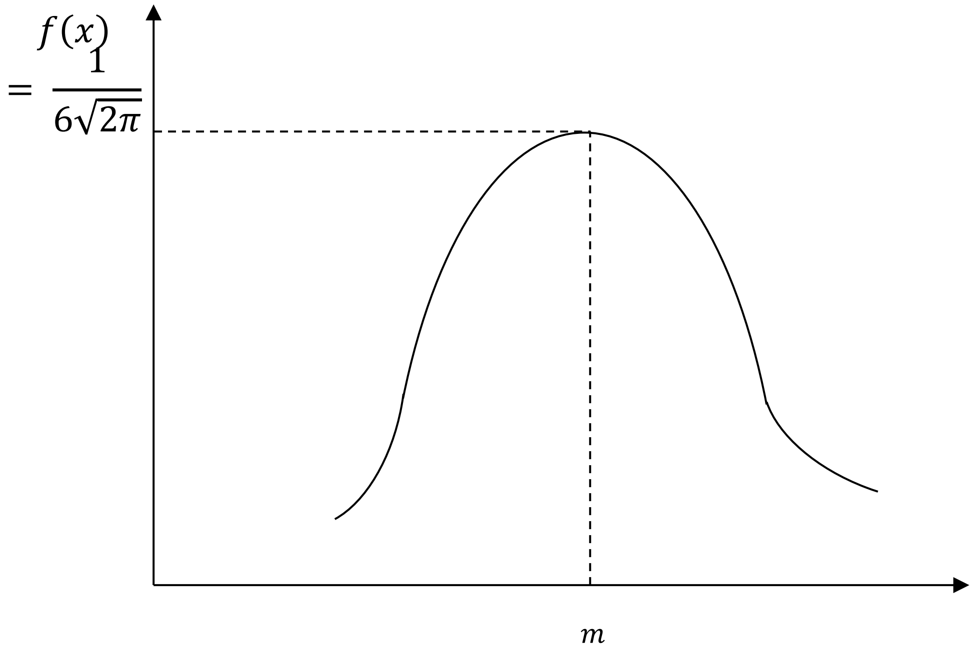
$$f(x)=\ \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2} \qquad x\in R, m\in R$$

$$\sigma>0$$

مع توقع X إذا كان X يخضع لتوزيع طبيعي

$E(X) = m$
$V(X) = \sigma^2$

تأخذ دالة التوزيع الطبيعي شكل الجرس وهو متناظر حول المتوسط (m) كما يلي:



ونكتب: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\ dx$

$X \nearrow N\,(m\,;\sigma)$

ب/ التوزيع الطبيعي القياسي وحساب الاحتمالات:

لحساب الاحتمالات ننتقل من لتوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي القياسي أي من وحدات طبيعية Xإلى وحدات قياسية T

أي: $T = \frac{X-m}{\sigma}$ $\qquad X \nearrow N\,(m\,;\sigma)$

$T \nearrow N\,(0\,,1)$

$$E(T) = E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\,E(X) - m = 0$$

$$V(T) = V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\,V(E) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

مثال1: $P(T \leq 2{,}5) = 0{,}9938$

$P\,(T \geq 1{,}18) = 1 - P\,(T \leq 1{,}18)$

$$= 1 - 0.8810 \; = 0.119$$

بالتناظر

$$P(T \leq -0{,}78) = P(T \geq 0{,}78)$$
$$= 1 - P\ (T \leq 0{,}78)$$
$$= 1 - 0{,}7823$$
$$= 0{,}2177$$
$$P(T \geq \ -0{,}78) = \ P(T \geq 0{,}78)$$
$$= 0{,}7823$$

الخصائص:

النتيجة من الجدول: $P(T \leq t)$

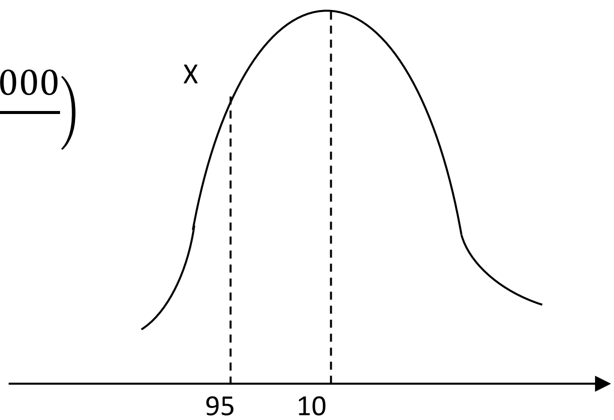
$$P(T \geq t) = \ 1 - P(T \leq t)$$
$$P(T \leq -t) = \ 1 - p(T \leq t)$$
$$P(T \geq -t) = \ P(T \leq t)$$

مثال2: يخضع عمر نوع من البطاريات إلى توزيع طبيعي بمتوسط حسابي قدره 1000 ساعة وانحراف معياري 50 ساعة، تم اختيار بطارية من هذا النوع عشوائيا

أحسب احتمال أن لا تفوق مدة صلاحيتها 950 ساعة؟

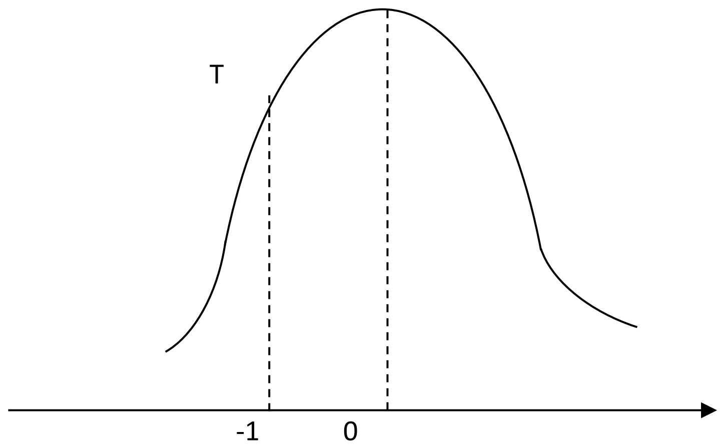
تصحيح المثال 2: "عمر صلاحية البطاريات بالساعة $X \nearrow N\ (1000\ ,50)$

$$P(X \leq 950) = \ P\left(\frac{X - 1000}{50} \leq \frac{950 - 1000}{50}\right)$$



$$= P(T \leq -1)$$

$$= 1 - P(T \leq 1)$$



$$= 1 - 0,8413$$
$$= 0,1587$$

مثال 3: تخضع الأجور الفردية في منطقة معينة إلى توزيع طبيعي بمتوسط قدره 10000دج وانحراف معياري800دج.

أحسب احتمال أن يفوق أجر شخص من هذه المنطقة 11000دج؟

X: الأجور الفردية في المنطقة" $X \nearrow N\ (10000\ ,800)$

$$P(X \geq 11000) = P\left(\frac{X - 10000}{800} \geq \frac{11000 - 10000}{800}\right)$$
$$= P(T \geq 1.25)$$
$$= 1 - P\ (T \leq 1.25)$$
$$= 1 - 0,8944$$
$$= 0,1056$$

مثال4: إذا كانت علامات الطلبة في مقياس الإحصاء تتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي قدره 14 وانحراف معياري 2.

ما احتمال أن تكون علامة طالب أختير عشوائيا:

1- أكثر من 17

2- أكثر من 13

3- أكثر من 12

4- بين 15 و17

5- أقل من 9

6- بين 10 و 15.

تصحيح المثال 4:

X "علامات الطلبة في الإحصاء" $X \nearrow N\ (14\ ,2)$

$$P(X \geq 17) = P\left(\frac{X - 14}{2} \geq \frac{17 - 14}{2}\right)$$
$$= P(T \geq 1.5)$$
$$= 1 - P\ (T \leq 1.5)$$
$$= 1 - 0,9332$$
$$= 0,0668$$

$$P(X \geq 13) = P\left(\frac{X-14}{2} \geq \frac{13-14}{2}\right)$$
$$= P(T \geq -0.5)$$
$$= P(T \leq 0.5)$$
$$= 0{,}6915$$

$$P(X \geq 12) = P\left(\frac{X-14}{2} \geq \frac{12-14}{2}\right)$$
$$= P(T \geq -1)$$
$$= P(T \leq 1)$$
$$= 0{,}8413$$

$$P(15 \leq X \leq 17) = P\left(\frac{15-14}{2} \leq \frac{X-14}{2} \leq \frac{17-14}{2}\right)$$
$$= P(0{,}5 \leq T \leq 1.5)$$
$$= P(T \leq 1.5) - P\,(T \leq 0{,}5)$$
$$= 0{,}9332 - 0{,}6915$$
$$= 0{,}2417$$

$$P(X \leq 9) = P\left(\frac{X-14}{2} \leq \frac{9-14}{2}\right)$$
$$= P(T \leq -2.5)$$
$$= 1 - P\,(T \leq 2.5)$$
$$= 1 - 0{,}9938$$
$$= 0{,}0062$$

$$P(10 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{10-14}{2} \leq \frac{X-14}{2} \leq \frac{15-14}{2}\right)$$
$$= P(-2 \leq T \leq 0.5)$$
$$= P(T \leq 0.5) - P\,(T \leq -2)$$
$$= P(T \leq 0.5) - [1 - P\,(T \leq 2)]$$
$$= P(T \leq 0.5) - 1 + P\,(T \leq 2)$$
$$= 0{,}6915 - 1 + 0{,}9772$$
$$= 0{,}6687$$