التصرف التقاربي والتقارب

التقارب بالاحتمال

لتكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية معرفة على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ و X متغير عشوائي معرف على نفس الفضاء. نقول أن X_n تقارب بالاحتمال المتغير X و نكتب $X_n \xrightarrow{P} X$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon>0,\quad \underset{n\to+\infty}{Lim}\ P\left(\left|X_n-X\right|>\varepsilon\right)=0 \qquad \left((\forall \varepsilon>0,\quad \underset{n\to+\infty}{Lim}\ P\left(\left|X_n-X\right|\leq\varepsilon\right)=1)\right)$$

مثال: لتكن $(X_k)_{k\geq 1}$ متتالية من المتغيراتالعشوائية المستقلة بحيث:

$E(X_k)=0$; $\forall k=1,..,n$ و $V(X_k)=1$; $\forall k=1,..,n$. نبين أن : $\overline{X}_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{n}\xrightarrow{P}0$

حسب نظرية Tchebytchev لدينا:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \underset{n\to+\infty}{Lim}\ P\left(\left|\overline{X}_n-0\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{1}{n\varepsilon^2}\quad\Rightarrow\quad\forall\varepsilon>0\ ,\ \underset{n\to+\infty}{Lim}\ P\left(\left|\overline{X}_n-0\right|>\varepsilon\right)\leq\underset{n\to+\infty}{Lim}\ \frac{1}{n\varepsilon^2}=0$$

القانون الضعيف للأعداد الكبرى

نظرية . لتكن $\{X_1,\ldots,X_n\}$ متتالية من n متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع توقعه μ و تباينه σ^2 فإن:

$$\overline{X}_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{n}\xrightarrow{P}\mu$$

مثال. لتكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث: $\forall n,\ X_n\sim B(n,p)$. نبين أن $\frac{X_n}{n}\xrightarrow{P}p$.

حسب نظرية Tchebytchev لدينا:

$$\forall\varepsilon>0,\quad P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}=0$$

التقارب بالتوزيع

لتكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية معرفة على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ و X متغير عشوائي معرف على نفس الفضاء. لتكن $F_n()$ دالة التوزيع التراكمي لـ X_n و $F(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ X . نقول أن X_n تقارب بالتوزيع X ونكتب $X_n\xrightarrow{L}X$ إذا وفقط إذا عند كل نقطة استمرار x لـ $F(.)$ تحقق ما يلي:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ F_n(x)=F(x)$$

ملاحظة . لتكن $M_{X_n}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ X_n و $M_X(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ X. نقول أن X_n تقارب بالتوزيع المتغير X إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\forall t, \quad \lim_{n\to+\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$$

مثال لتكن $(X_n)_{n\geq1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث:

$\lambda = np$, $n\to+\infty$, $p\to 0$, $X_n \sim B(n,p)$ ، نبين أن : $X_n \xrightarrow{L} X$ حيث $X\sim P(\lambda)$.

لتكن $F_n(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ X_n

$$\forall x_0,\ F_n(x_0) = P(X_n \leq x_0) = \sum_{x=0}^{x_0} P(X_n = x) = \sum_{x=0}^{x_0} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{x_0} \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$\forall x_0,\ F_n(x_0) = \sum_{x=0}^{x_0} \frac{n(n-1)\ldots(n-(x+1))(n-x)!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \sum_{x=0}^{x_0} \frac{n(n-1)\ldots(n-(x+1))}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$\forall x_0,\ F_n(x_0) = \sum_{x=0}^{x_0} \frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{(x+1)}{n}\right)\right]$$

$$\forall x_0,\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x_0) = \sum_{x=0}^{x_0} \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{(x+1)}{n}\right)\right] = \sum_{x=0}^{x_0} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = F(x_0)$$

حيث $F(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ X.

مثال لتكن $(Y_n)_{n\geq1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث: $X_n \sim \chi^2_{(n)}$ و $Y_n = \dfrac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$.

نبين أن : $Y_n \xrightarrow{L} Z$ حيث $Z\sim N(0,1)$.

لتكن $M_{X_n}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ X_n و $M_{Y_n}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ Y_n

$$M_{Y_n}(t) = E\left(e^{tY_n}\right) = E\left(e^{t\left(\frac{X_n-n}{\sqrt{2n}}\right)}\right) = E\left(e^{\left(\frac{tX_n}{\sqrt{2n}}-\frac{tn}{\sqrt{2n}}\right)}\right) = e^{-t\sqrt{\frac{n}{2}}}\left(e^{\left(\frac{tX_n}{\sqrt{2n}}\right)}\right) = e^{-t\sqrt{\frac{n}{2}}} M_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) = e^{-t\sqrt{\frac{n}{2}}}\left(1-\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^{\frac{-n}{2}}$$

$$\forall t < \sqrt{\frac{2}{n}} \quad , \quad M_{Y_n}(t) = \left(e^{t\sqrt{\frac{2}{n}}}\left(1-t\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\right)^{\frac{-n}{2}} = \left(\left(1+t\sqrt{\frac{2}{n}}+\frac{t^2}{n}\right).\left(1-t\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\right)^{\frac{-n}{2}} = \left(1-\frac{t^2}{n}-\frac{t^3}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{-n}{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} M_{Y_n}(t) = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-n}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{n}-\frac{t^3}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}\right)} \approx \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-n}{2}\left(-\frac{t^2}{n}-\frac{t^3}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{\sqrt{2n}}\right)} = e^{\frac{t^2}{2}} = M_Z(t)$$

حيث $M_Z(t)$ دالة التوزيع التراكمي لـ Z.

. نظرية النهاية المركزية

نظرية لتكن $\{X_1, X_2,..., X_n\}$ متتالية من n متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع توقعه الرياضي μ و تباينه σ^2 و n كبيرة بما فيه الكفاية فإن:

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

البرهان: لتكن $M_{Z_n}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ Z_n

$$M_{Z_n}(t) = E\left(e^{tZ_n}\right) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{t\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right) = \prod_{i=1}^{n} M_{\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}(t) = \left(M_{\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}(t)\right)^n = \left(M_{Z_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n; \quad Z_i \sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} M_{Z_n}(t) = \lim_{n\to+\infty}\left(M_{Z_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{t^2}{2n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{2n}\right)\right)^n = e^{\frac{t^2}{2}}$$

مثال . نفترض أن الإنتاج اليومي X_i لمصنع مؤسسة ''كندور'' للتلفزيونات متغير عشوائي توقعه الرياضي μ و تباينه $\sigma^2 = 100$. نختار بصفة عشوائية 100 يوم من أيام السنة. ليكن $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ الإنتاج الكلي و $\overline{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ متوسط الإنتاج. نحسب $P(|S-100\mu| \le 196)$

حسب نظرية النهاية المركزية لدينا: $Z = \frac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)100}} = \frac{S-100\mu}{100} \xrightarrow{L} N(0,1)$

$$P(|S-100\mu| \le 196) = P(|Z| \le 1{,}96) = P(-1{,}96 \le Z \le 1{,}96) = 2\Phi(1{,}96) - 1 = 2(0{,}975) - 1 = 0{,}95$$

تقريب توزيع ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي

نظرية . لتكن $(X_n)_{n\ge1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث $(n\to+\infty, p\to0)$ / $\forall n,\ X_n \sim B(n,p)$، فإن المتغير العشوائي X_n يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $\left(X_n \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})\right)$ و لدينا:

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

البرهان: نعتبر المتغيرات العشوائية المستقلة $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ بحيث: $\forall i,\ Y_i \sim B(p)$ و $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim B(n,p)$

حسب (نظرية النهاية المركزية) لدينا: $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{(X_n - np)}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{L} N(0,1)$

ملاحظة: كلما كانت n كبيرة بما فيه الكفاية و p صغيرا جدا يكون تقريب التوزيع ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي أحسن. في التطبيقات يمكننا استعمال القاعدة العملية الآتية:

لتكن $X_n \sim B(n,p)$ ، $n \to +\infty (n \geq 30)$ ، $np \geq 5$ و $n(1-p) \geq 5$ لدينا: $X_n \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})$

لحساب الاحتمالات نستعمل القاعدة التالية: (التصحيح بالاستمرارية)

$$\forall x,\ P_B(X_n = x) \approx P_N\left(x - \frac{1}{2} \leq X_n \leq x + \frac{1}{2}\right)$$

مثال: ليكن $X \sim B(n = 50, p = 0{,}4)$ ، حساب الاحتمالات الاتية بطريقتين.

$P(X = 15)$ ، $P(X > 18)$ و $P(16 < X < 21)$

الطريقة1: استعمال جدول التوزيع التراكمي $F(.)$ للتوزيع ذو الحدين

$P(X=15)=P(14<X\leq 15)=F(15)-F(14)=0{,}0995-0{,}0540=0{,}0415$

$P(X>18)=P(X\geq 19)=1-F(18)=1-0{,}3356=0{,}6644$

$P(16<X<21)=P(16<X\leq 20)=F(20)-F(16)=0{,}5610-0{,}1561=0{,}4049$

الطريقة2: استعمال تقريب التوزيع ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي

$$np = 50\times 0{,}4 = 20 > 5\ ;\ np(1-p) = 50\times 0{,}6 = 30 > 5 \ \Rightarrow\ X_n \approx N(20, \sqrt{12})$$

$$P(X = 15) \approx P(14{,}5 \leq X \leq 15{,}5) = P\left(\frac{14{,}5 - 20}{\sqrt{12}} \leq Z \leq \frac{15{,}5 - 20}{\sqrt{12}}\right) = \Phi(-1{,}58) - \Phi(-1{,}29) = 0{,}04\ ;\ Z \sim N(0,1)$$

$$P(X > 18) \approx P(X \geq 18{,}5) = P\left(Z \geq \frac{18{,}5 - 20}{\sqrt{12}}\right) = P(Z \geq -0{,}43) = \Phi(0{,}43) = 0{,}6664$$

$$P(16 < X < 21) \approx P(16{,}5 < X < 20{,}5) = P(-1{,}01 < Z < 0{,}14) = \Phi(0{,}14) - \Phi(-1{,}01) = 0{,}5557 - 0{,}8438 = 0{,}3995$$

تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي

نظرية: لتكن $(X_\lambda)_{\lambda > 0}$ متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث: $\forall \lambda,\ X_\lambda \sim P(\lambda) / (\lambda \to +\infty)$. فإن المتغير العشوائي X_λ يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $X_\lambda \approx N(\lambda, \sqrt{\lambda})$ و لدينا:

$$Z_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

البرهان: لتكن $M_{X_\lambda}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ X_λ و: لتكن $M_{Z_\lambda}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ Z_λ.

$$M_{Z_\lambda}(t) = E(e^{tZ_\lambda}) = E\left(e^{t\left(\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)}\right) = E\left(e^{t\frac{X_\lambda}{\sqrt{\lambda}}}.e^{-t\sqrt{\lambda}}\right) = e^{-t\sqrt{\lambda}}.E\left(e^{t\frac{X_\lambda}{\sqrt{\lambda}}}\right) = e^{-t\sqrt{\lambda}} M_{X_\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = e^{-t\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\left(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1\right)}$$

$$M_{Z_\lambda}(t) \approx e^{-t\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\left(1 + \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \frac{t^2}{2\lambda} - 1 + ..\right)} = e^{-t\sqrt{\lambda}} e^{t\sqrt{\lambda} + \frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}} = M_Z(t)$$

حيث $M_Z(.)$ هي الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي المعياري.

ملاحظة: كلما كانت λ كبيرة بما فيه الكفاية يكون تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي أحسن.
لحساب الاحتمالات نستعمل القاعدة التالية: (التصحيح بالاستمرارية)

$$\forall x,\ P_P(X_n = x) \approx P_N\left(x - \frac{1}{2} \le X_n \le x + \frac{1}{2}\right)$$

مثال: ليكن $X \sim P(18)$ ، نحسب بطريقتين $P(X = 11)$ ، $P(X > 11)$ و $P(11 < X < 15)$.

الطريقة1: استعمال جدول التوزيع التراكمي $F(.)$ للتوزيع ذو الحدين

$P(X > 11) = 1 - P(X \le 11) = 1 - F(11) = 1 - 0,055 = 0,945$ ، $P(X = 11) = e^{-18}\dfrac{(18)^{11}}{11!} = 0,025$

$P(11 < X < 15) = P(11 < X \le 14) = F(14) - F(11) = 0,208 - 0,055 = 0,153$

الطريقة2: استعمال تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي: $X \approx N\left(18, \sqrt{18}\right)$

$P(X > 11) = P(X \ge 11,5) = P(Z \ge -1,53) = 0,93699$ ، $P(X = 11) \approx P(10,5 \le X \le 11,5) = P(-1,77 \le Z \le -1,53) = 0,0246$

$P(11 < X < 15) = P(11,5 \le X \le 14,5) = P(-1,53 \le Z \le -0,82) = 0,143$