العزوم

ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. العزم من الرتبة k $(k\in N^*)$ للمتغير العشوائي X بالنسبة للعدد الثابت a هو العدد الحقيقي (إذا وجد) $E\left((X-a)^k\right)$.

إذا كان $a=0$ ، يسمى $E(X^k)$ العزم غير المتمركز من الرتبة k للمتغير العشوائي X ونكتب:

$$m_k(X)=m_k=E(X^k)$$

إذا كان X مغير عشوائي منفصل

$$m_k=\sum_{x\in R_X} x^k\ P(X=x)$$

إذا كان X مغير عشوائي مستمر

$$m_k=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\ f(x)dx$$

ملاحظة $m_1=E(X)$

إذا كان $a=E(X)$ ، يسمى $\mu_k(X)=\mu_k=E\left((X-E(X))^k\right)$ **العزم المتمركز** من الرتبة k للمتغير X

إذا كان X مغير عشوائي منفصل

$$\mu_k=\sum_{x\in R_X}(x-E(X))^k\ P(X=x)$$

إذا كان X مغير عشوائي مستمر

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^k\ f(x)dx$$

Scanné avec CamScanner

ملاحظة $\mu_1=0$ ، $\mu_2=m_2-m_1^2$ ، $\mu_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3$ و $\mu_4=m_4-4m_1m_3+6m_1^2m_2-3m_1^4$.

العزم العاملي من الرتبة k للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي (إذا وجد):

$$\mu_{[k]}(X)=\mu_{[k]}=E\big(X(X-1)(X-2)....(X-k+1)\big)$$

ملاحظة $\mu_{[1]}=m_1=E(X)$ و $\mu_{[2]}=m_2-m_1$

مثال 1 ، ليكن X المتغير العشوائي المعرف في مثال 11.1. احسب m_3 ، μ_3 و $\mu_{[3]}$.

$$m_3=\sum_{x\in R_X}x^3\ P(X=x)=0^3.\frac{1}{10}+1^3.\frac{2}{10}+2^3.\frac{3}{10}+3^3.\frac{4}{10}=\frac{2+24+108}{10}=\frac{134}{10}$$

$$\mu_3=\sum_{x\in R_X}(x-2)^3\ P(X=x)=(0-2)^3.\frac{1}{10}+(1-2)^3.\frac{2}{10}+(2-2)^3.\frac{3}{10}+(3-2)^3.\frac{4}{10}=\frac{-8-2+4}{10}=\frac{-2}{5}$$

$$\mu_{[3]}=E\big(X(X-1)(X-2)\big)=E\big(X^3-3X^2+2X\big)=E(X^3)-3E(X^2)+2E(X)=\frac{134}{10}-15+4=\frac{134-110}{10}=\frac{24}{10}$$

الدالة المولدة للعزوم

ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. الدالة المولدة للعزوم للمتغير X هي التوقع الرياضي للمتغير العشوائي e^{tX} ونرمز لها بـ $M_X(t)$ حيث $t\in R$:

$$M_X(t)=E\big(e^{tX}\big)$$

إذا كان X مغير عشوائي منفصل

$$M_X(t)=\sum_{x\in R_X}e^{tx}\ P(X=x)$$

إذا كان X مغير عشوائي مستمر

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\ f(x)dx$$

نظرية ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. المشتقة من الرتبة k للدالة المولدة للعزوم للمتغير X مأخوذة في النقطة $t=0$ تساوي العزم من الرتبة k للمتغير العشوائي X .

$$\left.\frac{d^{(k)}M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=M_X^{(k)}(0)=E(X^k)=m_k$$

البرهان: بما أن: $\left(e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...\right)$

$$M_X(t)=E(e^{tX})=E\left(1+tX+\frac{t^2X^2}{2!}+\frac{t^3X^3}{3!}+...+\frac{t^nX^n}{n!}+...\right)=1+tE(X)+\frac{t^2}{2!}E(X^2)+\frac{t^3}{3!}E(X^3)+...+\frac{t^n}{n!}E(X^n)+...$$

$$M_X'(t)=E(X)+tE(X^2)+\frac{t^2}{2}E(X^3)+...+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}E(X^n)+...\Rightarrow M_X'(0)=E(X)$$

$$M_X''(t)=E(X^2)+tE(X^3)+...+\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}E(X^n)+...\Rightarrow M_X''(0)=E(X^2)$$

وبالتالي :

$$\left.\frac{d^{(k)}M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=M_X^{(k)}(0)=E(X^k)=m_k$$

Scanné avec CamScanner

ملاحظة نستنتج من النظرية ... أن: $V(X)=M''(0)-(M'(0))^2$

مثال . ليكن X متغير عشوائي منفصل دالة توزيعه الاحتمالي معطاة كما يلي:

$$\forall x\in\{0,1\},\ P(X=x)=P^x(1-p)^{1-x}\ ;\ 0<p<1$$

إيجاد الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ للمتغير X ثم استنتاج E(X) و V(X).

$$M_X(t)=\sum_{x\in R_X}e^{tx}\,P(X=x)=(1-p)+pe^t\ ,\ \forall t$$

$$M'_X(t)=pe^t \quad \text{و} \quad M''_X(t)=pe^t$$

$$E(X)=M'_X(0)=p\ ;\ E(X^2)=M''_X(0)=p\ ;\ V(X)=M''(0)-(M'(0))^2=p-p^2=p(1-p)$$

مثال ... ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x)=\begin{cases}e^{1-x} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$$

إيجاد الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ للمتغير X ثم استنتاج E(X) و V(X).

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\,f(x)dx=\int_1^{+\infty}e^{tx}\,e^{1-x}dx=\int_1^{+\infty}e^{tx-x+1}\,dx=e\left[\frac{e^{(t-1)x}}{t-1}\right]_1^{+\infty}=\frac{e^t}{1-t}\ ;\ t<1$$

$$M'_X(t)=\frac{(2-t)e^t}{(1-t)^2}\ ,\ t<1\ ;\qquad M''_X(t)=\frac{(5-4t+t^2)e^t}{(1-t)^3}\ ,\ t<1$$

$$E(X)=M'_X(0)=2\ ;\ E(X^2)=M''_X(0)=5\ ;\ V(X)=M''(0)-(M'(0))^2=5-4=1$$

Scanné avec CamScanner