- التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة

Continuous Probability Distributions

هناك الكثير من التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة، ولها دوال كثافة احتمال محددة، وفيما يلي بعض هذه التوزيعات:

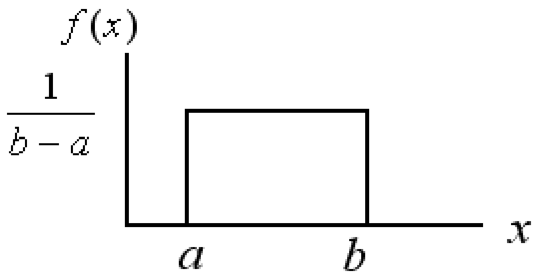
1/2 التوزيع المنتظم **Uniform distribution**

شكل دالة كثافة الاحتمال

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم، فإذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع منتظم ***Uniform***، و $a<x<b$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{b-a}\ ,\ a<x<b}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معالم هذا التوزيع

توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (b,a)، ولذا يكتب رمز لهذا التوزيع الصورة $x\sim U(a,b)$

خصائص التوزيع المستطيل

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما :

$$\mu=E(x)=\frac{a+b}{2}\ ,\ \ \sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

على الطالب إثبات ذلك:

دالة التوزيع التجميعي ***C.D.F***

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$\boxed{\begin{aligned}F(x)&=p(X\le x)=\int_a^x f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^x dx\\&=\frac{x-a}{b-a}\end{aligned}}$$

مثـال

استورد أحد المراكز التجارية **1500** طن بطاطس، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، فأوجد الآتي:

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.
- بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحـــل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالشهر، أي أن $0<x<12$ ، ومن ثم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الصورة التالية:

$$f(x)=\frac{1}{12-0}=\frac{1}{12}\ ,\ 0<x<12$$

- حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.

بفرض أن Q هي كمية البطاطس المستوردة ، تكون الكية المتبقية بالمخزن بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي :

$$Q\times p(x>7)=Q\times(1-F(7))=1500(1-\frac{7-0}{12-0})=625\ Ton$$

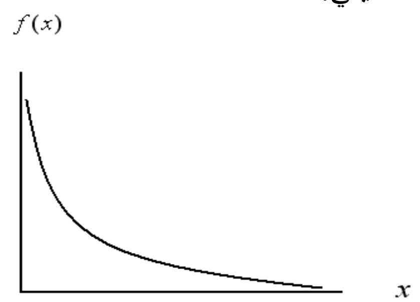
2/2 التوزيع الأسي السالب **Negative Exponential distribution**

شكل دالة كثافة الاحتمال ***p.d.f***

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع أسي سالب ، مداه هو $0<x<\infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x)=\theta\, e^{-\theta x},\ 0<x<\infty\ ,\ \theta>0} \qquad (١٧-٨)$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معالم هذا التوزيع

توجد معلمة واحدة هي (θ)

خصائص التوزيع الأسى السالب

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما:

$$\mu=E(x)=\frac{1}{\theta}\ ,\quad \sigma^2=\frac{1}{\theta^2}$$

دالة التوزيع التجميعي ***C.D.F***

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$F(x)=p(X\le x)=\int_0^x f(x)dx=\left(1-e^{-\theta x}\right)$$

مثـــال

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط **2** دقيقة، فأوجد ما يلي.

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل.

- ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

الحـــل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي أن $0 < x < \infty$ ، فإن المتوسط $1/\theta = 2$ ، ومن ثم تصبح قيمة (θ) هي: $(\theta = 0.5)$ ، وتكتب دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن على الصورة التالية:

$$f(x) = 0.5\ e^{-0.5\ x},\ 0 < x < \infty$$

- حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

$$p(x \le 1) = (1 - e^{-0.5x}) = (1 - e^{-0.5(1)}) = 0.3935$$

3/2 التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

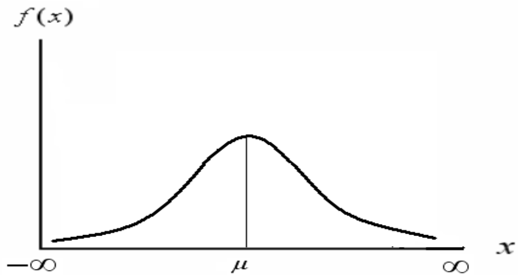
يعتبر هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع، وفيما يلي عرض لهذا التوزيع.

شكل دالة كثافة الاحتمال *p.d.f*

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع طبيعي ، مداه هو $-\infty < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ -\infty < x < \infty\ ,\ \ \pi = 22/7}$$

وهذا التوزيع له منحنى متماثل يأخذ الصورة التالية:



فهذا المنحنى متماثل على جانبي الوسط الحسابي μ .

معالم هذا التوزيع

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

الوسط الحسابي : $E(x) = \mu$ والتباين : $\text{var}(x) = \sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير x بالرموز : $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2 .

خصائص التوزيع الطبيعي

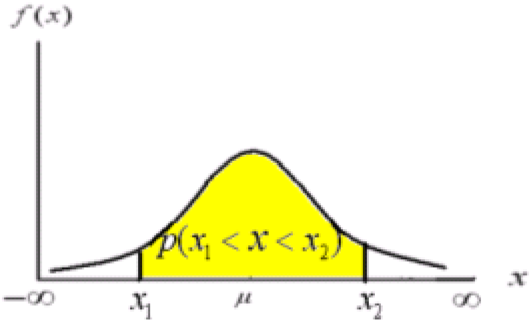
هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

1- الوسط الحسابي μ 2- والتباين σ^2

3- منحني هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط μ

كيفية حساب الاحتمالات $p(x_1 < X < x_2)$

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x_1 < X < x_2)$ ، وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويلة رياضية **Transform**، يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ويعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي المعياري **Standard Normal Variable**، وهذا المتغير له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

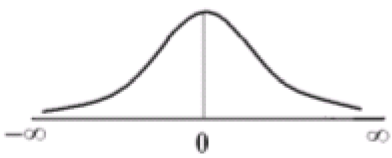
$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \ , -\infty < z < \infty \ , \ \pi = 22/7}$$

ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

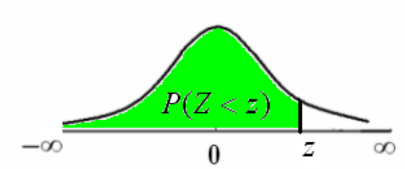
1- متوسطه هو: $E(z) = 0$ 2- تباينه هو: $\text{var}(z) = 1$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير z بالرموز : $z \sim N(0,1)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط (0) ، وتباين (1) .

3-يأخذ المنحنى شكل الجرس المتماثل على جانبي الصفر:



وصمم الإحصائيون جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع التجميعي: $F(z) = P(Z < z)$ ، كما هو مبين بالرسم التالي:

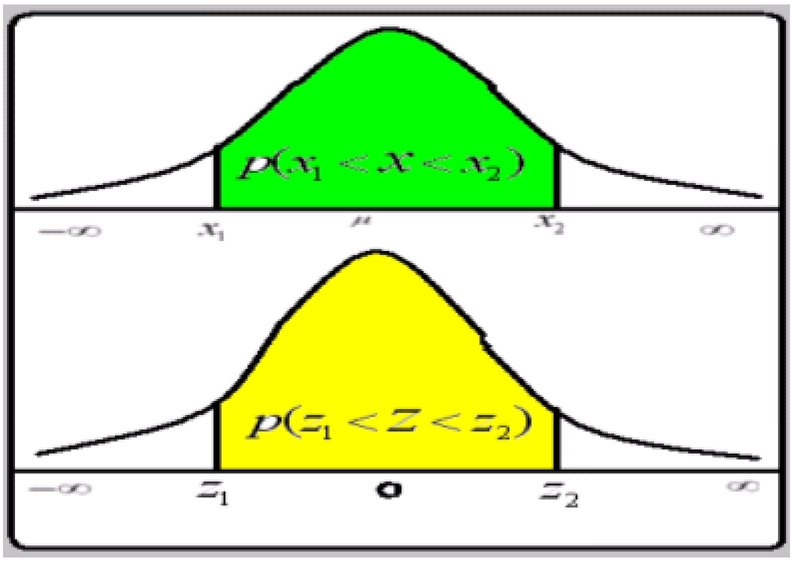


ونعود الآن إلى خطوات حساب الاحتمال $p(x_1 < X < x_2)$ باستخدام التحويلة $z = (x-\mu)/\sigma$:

1- يتم تحويل القيم الطبيعية (x_1, x_2) إلى قيم طبيعية معيارية:

$z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma \ , \ z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$.

2- ومن ثم يكون الاحتمال: $p(x_1 < X < x_2) = p(z_1 < Z < z_2)$:



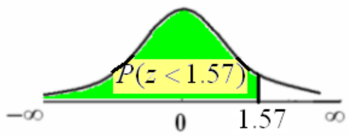
3- تستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري، والذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال $F(z) = P(Z < z)$

4- طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري في حساب الاحتمالات
أوجد الاحتمالات التالية:

أ- $P(z < 1.57)$ ب- $P(z < -2.33)$ ج- $P(z > 1.96)$ د- $P(-2.01 < z < 1.28)$

الحل

أ- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z < 1.57) = F(1.57)$ أسفل المنحنى كما يلي



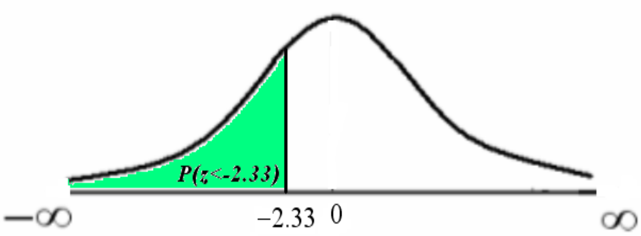
ويتم استخدام الجدول كما هو مبين :

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										
1.40										
1.50								0.9418		
⋮										

ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(z < 1.57) = F(1.57) = 0.9418$

ب- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(z < -2.33) = F(-2.33)$ موضحة كالتالي:

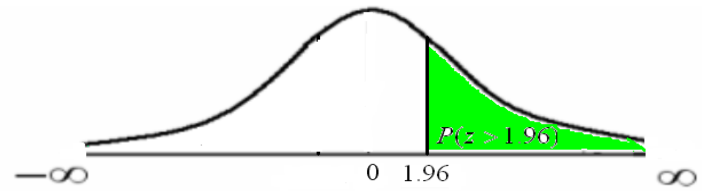
P(z<-2.33)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.										
.										
.										
.										
-2.70										
-2.60										
-2.50										
-2.40										
-2.30				0.0099						
.										
.										
.										

ومن ثم يكون : $P(z < -2.33) = 0.0099$

ج- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z > 1.96)$ كالتالي:



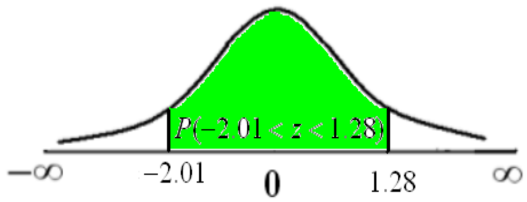
وهذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعي ، حيث أن :

$$P(z > 1.96) = 1 - p(z < 1.96) = 1 - F(1.96)$$

وبالكشف في الجدول بنفس الطريقة السابقة على القيمة **1.96** نجد أن : $p(z < 1.96) = 0.9750$ ، ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(z > 1.96) = 1 - 0.9750 = 0.0250$$

د- المساحة أسفل **المنحنى المعبرة عن الاحتمال** $P(-2.01 < z < 1.28)$ **هي:**



وباستخدام أيضا خصائص دالة التوزيع التجميعي يمكن حساب هذا الاحتمال ، حيث أن :

$$P(-2.01 < z < 1.28) = F(1.28) - F(-2.01)$$

وبالكشف في الجدول عن هاتين القيمتين ، نجد أن:

$$P(-2.01 < z < 1.28) = 0.8997 - 0.0222 = 0.8775$$

مثـــال(8-8)

إذا كان الدخل السنوي للأسرة في أحد المدن يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ألف دينار، وتباينه 900. والمطلوب:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

2- كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.
3- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف دينار ؟
4- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول؟

الحــــل

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

بفرض أن x متغير عشوائي يعبر عن الدخل السنوي بالألف دينار، وهو يتبع التوزيع الطبيعي، ومعالمه هي:

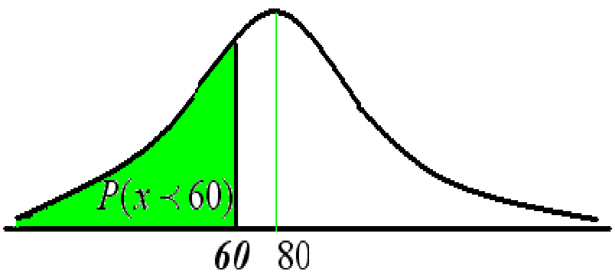
أ- المتوسط $E(x) = \mu = 80$ ب- التباين هو: $Var(x) = \sigma^2 = 900$

أي أن : $x \sim N(80,900)$

2- شكل دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2} \;, \; -\infty < x < \infty \;, \; \pi = 22/7$$

3- نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف دينار هي: $P(x \prec 60)$



ويتبع الخطوات المذكورة سابقا في حساب الاحتمال كما يلي:

$$P(x < 60) = p\left(z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(z < \frac{60-80}{30}\right) = P(z < -0.67) = F(-0.67)$$

وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري ، نجد أن

$$P(x < 60) = P(z < -0.67) = 0.2514$$

4- الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول: في هذه الحالة يبحث عن قيمة المتغير (x) الذي أقل منه 0.975 ، بفرض أن هذا المتغير هو (x_1) ، فإن :

$$P(x < x_1) = p\left(z < \frac{x_1 - 80}{30}\right) = 0.975$$

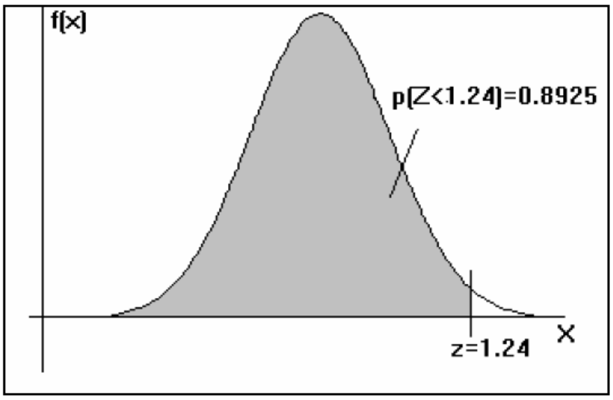
بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن المساحة 0.9750 نجدها تقع عند تقاطع الصف 1.9 ، والعمود .06 أي أن قيمة $z = 1.96$ ، ويكون :

$$1.96 = \frac{x_1 - 80}{30} \;, \; Then \quad x_1 = 30(1.96) + 80 = 138.8$$

إذا الدخل هو 138.8 ألف دينار في السنة.

TABLE DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

Lecture de la table: Pour z=1.24 (intersection de la ligne 1.2 et de la colonne 0.04), on a la proportion P(Z < 1,24) = 0.8925



P(Z > 1,96) = 0,025
P(Z > 2,58) = 0,005
P(Z > 3,29) = 0,0005

Rappels:
1/ P(Z > z) = 1 - P(Z < z) et 2/ P(Z < -z) = P(Z > z)
Exemple: Sachant P(Z < 1,24) = 0,8925, on en déduit:
1/ (P(Z > 1,24) = 1 - P(Z < 1,24) = 1- 0,8925 = 0,1075
2/ P(Z < -1,24) = P(Z > 1,24) = 0,1075

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998