1– المتغير العشوائي

في الكثير من الأحيان عند القيام بتجربة ما أو القيام بدراسة ما نتعامل مع قيم فعلية مثل أسعار المستهلكين، تكاليف الاستثمار، أسعار الفائدة وما إلى ذلك. لكن في أحيان أخرى نكون أمام قيم غير عددية ولكن تكون هذه القيم مرتبطة بقيم عددية ذات الأهمية. مثلا، إذا كانت التجربة هي اختيار مجموعة من الطلبة من قسم معين، فيمكن اختيار هؤلاء الطلبة على أساس علاماتهم أو طولهم..... الخ. وعند التعامل مع هذه القيم العددية فمن المفيد تخصيص احتمالات لها. وهذه العلاقة تسمى بالمتغير العشوائي الذي يعرف على أنه مجموعة من القيم العددية لتجربة عشوائية، يكون تحقق هذه القيم مرتبط باحتمالات معينة. وينقسم إلى نوعين: المتغير العشوائي المنفصل والمتغير العشوائي المتصل.

2. المتغير العشوائي المنفصل

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ عددا من القيم الممكنة في مجال مغلق. فمثلا نقول أن المتغير العشوائي X يأخذ 3 قيم ممكنة داخل المجال المغلق $[1, 3]$. (سالفاتور، 2011)

مثال 1.3: تتمثل تجربة في رمي 3 قطع نقدية على الأرض. إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الصور الظاهرة فإنه يأخذ القيم التالية $3, 2, 1, 0$ حيث أن كل قيمة ترتبط باحتمال معين. لدينا عدد الحالات الممكنة: $\Omega = \{(HHH)(HHT)(HTT)(HTH)(THH)(THT)(TTH)(TTT)\}$

$$P(X = 0) = P\{(TTT)\} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P\{(HTT)(THT)(TTH)\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P\{(HHT)(HTH)(THH)\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P\{(HHH)\} = \frac{1}{8}$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الجدول التالي:

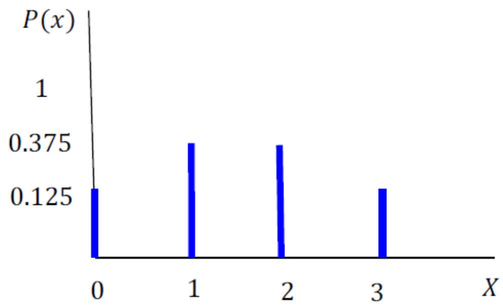
x_i	0	1	2	3	**Σ**
p_i	0.125	0.375	0.375	0.125	1

حيث أنه يجب أن يكون:

$$f(x_i) \geq 0$$
$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

ويسمى هذا أيضا بقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يعرف بالعلاقة التي تربط القيم الممكنة للمتغير العشوائي مع احتمالاتها. حيث يجب أن يكون مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح و$f(x_i) \geq 0$.

ويمكن التعبير عن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل للمثال أعلاه في الشكل التالي:



1.2. تابع التوزيع

يعرف تابع التوزيع F للمتغير العشوائي X بأنه الدالة $F: R \rightarrow R$ حيث (Dekking et al. 2005)

$$F(a) = P(X \leq a)$$

أي أنه ذلك التابع الذي يشير إلى احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أصغر أو تساوي قيمة a. فإذا كان X متغير عشوائي متقطع وكان توزيعه الاحتمالي f فإن F هو تابع التوزيع المعرف كما يلي:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

ويعرف أيضا على أنه ذلك التابع الذي يمكننا من خلاله حساب احتمال المتغير العشوائي X عند أي قيمة أصغر أو تساوي قيمة x.

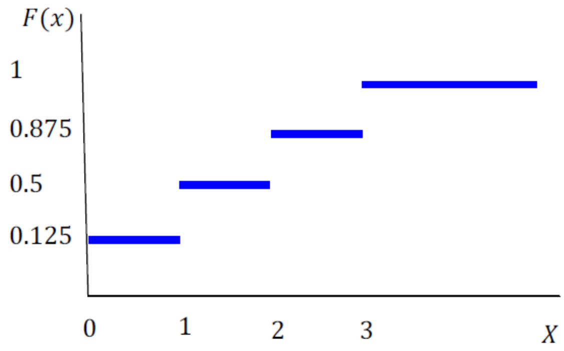
مثال 2.3: يمكن حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي X في المثال 1.3 من خلال:

x_i	0	1	2	3	**Σ**
p_i	0.125	0.375	0.375	0.125	1
$F(x)$	0.125	0.5	0.875	1	/

ويمكن التعبير عنه أيضا في:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 0.125 & 0 \leq X < 1 \\ 0.5 & 1 \leq X < 2 \\ 0.875 & 2 \leq X < 3 \\ 1 & X \geq 3 \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لتابع التوزيع كما يلي:



فمثلا إذا أردنا حساب احتمال $X \leq 2$ أو احتمال $X < 1.5$ فإنه يمكن استنتاجه مباشرة من الجدول أعلاه في السطر الأخير:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$
$$= 0.125 + 0.375 + 0.375 = 0.875$$
$$P(X < 1) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$
$$= 0.125 + 0.375 = 0.5$$

2.2: التوقع الرياضي

أحد أهم المفاهيم في نظرية الاحتمالات هو توقع المتغير العشوائي. فإذا كان X متغير عشوائي منفصل له دالة توزيع احتمالي $p_{(x)}$ فإن القيمة المتوقعة لـ X المشار إليها بـ $E(X)$ يمكن أن نعرفها من خلال:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

وبالتالي التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X في المثال 1.3 يساوي:

$$E(X) = (0.125 \times 0) + (0.375 \times 1) + (0.375 \times 2) + (0.125 \times 3) =$$
$$= 0 + 0.375 + 0.75 + 0.375 = 1.5$$

3.2: التباين

على الرغم من أن التوقع الرياضي$E(X)$ للمتغير العشوائي X يمكن أن يعطينا المتوسط المرجح لقيم X، إلى أنه لا يخبرنا عن اختلاف أو انتشار هذه القيم التي يمكن حسابها بواسطة التباين ويمكن التعبير عنه في:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

ويمكن حساب التباين للمتغير العشوائي X في المثال 1.3 في:

$$V(X) = (0^2 \times 0.125) + (1^2 \times 0.375) + (2^2 \times 0.375) + (3^2 \times 0.125) - (1.5)^2$$

$$= 0 + 0.375 + 1.5 + 1.125 - 2.25 = 0.75$$

4.2: الانحراف المعياري

الانحراف المعياري هو عبارة عن جدر التباين ويعرف رياضيا بواسطة:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

وبالتالي يمكن حساب الانحراف المعياري في المثال 1.3 في:

$$\delta(X) = \sqrt{0.75} = 0.86$$