ثانيا: في حالة تقليل التكاليف تحت قيد الإنتاج

في هذه الحالة المنتج ينتهج أسلوب الإنتاج بالطلب، وهدفه تعظيم ربحه من خلال تخفيض تكاليفه (إنفاقه).

1. الحل باستخدام طريقة مضاعف لاغرانج:

يتم البحث عن التركيبة التوازنية للمنتج باتباع الخطوات التالية:

أ. إعداد البرنامج الرياضي للمنتج ويكون بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \text{Min} \quad CT = LP_L + KP_K \\ \text{S.T.} \qquad Q = f(L,K) \end{cases}$$

ب.تكتب دالة لاغرانج بالصيغة التالية:

$$\mathcal{L} = CT + \lambda[Q - f(L,K)]$$

$$\mathcal{L} = LP_L + KP_K + \lambda[Q - f(L,K)]$$

2. الحل باستخدام طريقة شرطي التوازن:

$$\begin{cases} \dfrac{Pm_L}{Pm_K} = \dfrac{P_L}{P_K} \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ Q = f(L,K) \dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

مثال (2): نفس المثال السابق، بإفتراض أن المنتج يعتمد على عاملي رأس المال والعمل لإنتاج السلعة (X) وفق الدالة التالية: L.K=1250 ، حيث تقدر أسعار عوامل الإنتاج بـ 4 و.ن لعامل العمل و 2 و.ن لعامل رأس المال.

المطلوب:

1. ماهي التوليفة المثلى من عوامل الإنتاج التي تحقق الحد الأدنى من التكاليف لإنتاج قدره 1250 وحدة؟
2. ماهو مستوى االتكاليف الموافق لهذه التوليفة؟
3. بعد دراسة تحليلية لإمكانيات المؤسسة المالية تبين أنها لا تملك سوى 80٪ من قيمة الطلبية، ماهي كمية الإنتاج التي يمكن للمؤسسة توفيرها للزبون؟

حل المثال (2):

1. التوليفة التوازنية المثلى من رأس المال واليد العاملة التي تحقق أدنى تكلفة للمؤسسة:

← أ. بإستعمال طريقة مضاعف لاغرانج Lagrange Multiplier:

تدنية أو تقليل التكاليف تحت قيد الإنتاج:

أ. إعداد البرنامج الرياضي للمنتج ويكون بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \text{Min} \quad CT = 4L + 2K \\ \text{S.T} \quad 1250 = L.K \end{cases}$$

ب.كتابة دالة لاغرانج بالصيغة التالية:

$$\mathcal{L} = CT + \lambda[Q - f(L,K)]$$

$$\mathcal{L} = 4\mathrm{L} + 2\mathrm{K} + \lambda[1250 - L.K]$$

جـ. حساب جميع المشتقات الجزئية الأولى لكل متغيرات دالة لاغرانج ونضعها تساوي الصفر:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow 4 - \lambda K = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{K} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow 2 - \lambda L = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{L} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 1250 - L.K = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد: $\frac{4}{K} = \frac{2}{L} \Rightarrow K = 2L \dots\dots (4)$

بتعويض (4) في المعادلة (3) نجد:

$$1250 - L.2L = 0 \Leftrightarrow 1250 - 2L^2 = 0 \Rightarrow L^2 = 625 \Rightarrow \boldsymbol{L = 25}$$

نعوض قيمة L في الدالة رقم (4) فنجد: $K = 2L \Rightarrow K = 2.25 \Rightarrow \boldsymbol{K = 50}$

ومنه فإن التوليفة المثلى من عوامل الإنتاج التي تحقق أدني تكلفة هي 25 وحدة عمل (L) و50 وحدة رأس مال (K).(L,K)=(25, 50)

ب. بإستعمال طريقة شرطي التوازن:

$$\begin{cases} \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ Q = f(L,K) \dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{4}{2} \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 1250 = L.K \dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

الإنتاجية الحدية بالنسبة لعامل رأس المال: $Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = L$

الإنتاجية الحدية بالنسبة لعامل العمل: $Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = K$

بتعويض النواتج الحدية وأسعار عوامل الإنتاج في الشرط الضروري للتوازن نحصل على المعادلة التالية: $\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \Leftrightarrow \frac{K}{L} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow K = 2L \dots\dots\dots\dots (3)$

بتعويض (3) في دالة الإنتاج :

$$1250 = L.K \Leftrightarrow 1250 = L.2L \Rightarrow 1250 = 2L^2 \Rightarrow L^2 = 625 \Rightarrow \boldsymbol{L = 25}$$

نعوض قيمة L في المعادلة (3) فنجد: $K = 2L \Rightarrow K = 2\times25 \Rightarrow \boldsymbol{K = 50}$

وبالتالي فإن كميات عوامل الإنتاج التي تحقق أدنى تكلفة ممكنة للمنتج هي 25 وحدة عمل (L) و50 وحدة رأس مال (K).

2. حساب مستوى التكاليف الموافق لهذه التوليفة:

$$\text{CT} = 4\text{L} + 2\text{K} \Rightarrow CT = 4\times25 + 2\times50 \Rightarrow \textbf{CT} = \textbf{200}$$ **وحدة نقدية**

3. كمية الإنتاج التي يمكن للمؤسسة توفيرها للزبون:

$$\begin{cases} \text{Max Q} = \text{L.K} \\ \text{S.T. } 160 = 4\text{L} + 2\text{K} \end{cases}$$

باستخدام طريقة مضاعف لاغرانج: $\boldsymbol{\mathcal{L}} = L.K + \lambda(160 - 4L - 2K)$

لتعظيم هذه الدالة لابد أن تكون المشتقات الجزئية الأولى معدومة:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow K - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{K}{4} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow L - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{L}{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 160 - 4L - 2K = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد: $\frac{K}{4} = \frac{L}{2} \Rightarrow K = 2L \dots\dots (4)$

بتعويض (4) في الدالة (3) نجد:

$$160 - 4L - 4L = 0 \Leftrightarrow 160 - 8L = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L = 20}$$

نعوض قيمة L في الدالة (4) فنجد: $K = 2L \Rightarrow K = 2\times20 \Rightarrow \boldsymbol{K = 40}$

أكبر كمية توفرها المؤسسة للزبون: $Q = 40\times20 = \textbf{800}$ **وحدة**

إمكانيات الموسسة تسمح باستخدام 20 وحدة عمل و40 وحدة رأس مال وذلك لإنتاج 800 وحدة من الطلبية.

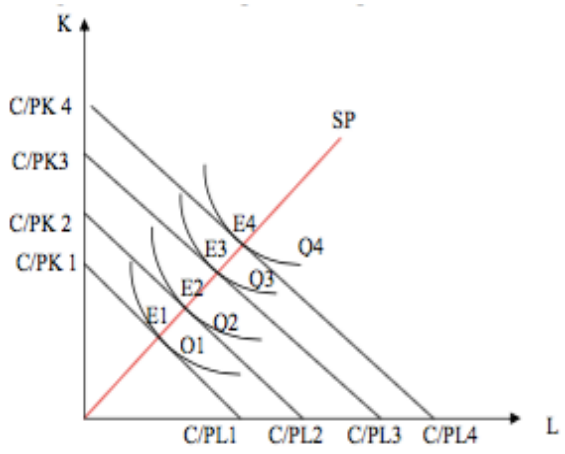
5. مسار التوسع أو منحنى توسع الإنتاج:

يعبر مسار التوسع عن المسلك الذي ينتهجه المنتج لزيادة قدرته الإنتاجية إذا زاد من ميزانيته (الإنفاق الكلي للإنتاج). بعبارة أخرى هو ذلك المنحنى الذي يصل بين نقاط توازن المنتج عندما يتغير الإنفاق الكلي مع ثبات أسعار عوامل الإنتاج والشكل التالي يوضح ذلك:

عند ثبات أسعار عوامل الإنتاج إذا زاد المنتج من الإنفاق الكلي، فإن منحنى التكلفة المتساوي ينتقل الى أعلى وبشكل موازي من الوضعية الأولى الى الوضعية الثانية ليكون بتماس مع منحنى الناتج المتساوي Q_2 عند نقطة توازن جديدة E_2 ، وهو مايعني أن المنتج يستطيع الحصول على كميات أكبر من L وK وبالتالي بإمكانه الحصول على كميات أكبر من الإنتاج.

عند الوصل بين مختلف نقاط التوازن التي نحصل عليها نتيجة تغيير المنتج للإنفاق الكلي نحصل على منحنى جديد يسمى **مسار التوسع.**

معادلة مسار التوسع هي عبارة عن علاقة بين رأس المال والعمل.



منحنى مسار التوسع

6. مرونة الإنتاج Production Elasticity:

تعبر مرونة الإنتاج عن مدى حساسية أو إستجابة الإنتاج الكلي للتغير في أحد عوامل الإنتاج، بعبارة أخرى هي التغير النسبي في الإنتاج الكلي نتيجة التغير النسبي في إحدى عوامل الإنتاج، مما يعني وجود المرونة الجزئية لعنصر العمل والمرونة الجزئية لعنصر رأس المال.

أ. المرونة الجزئية لعنصر العمل:

← في حالة بيانات دالة الإنتاج متقطعة (منفصلة):

$$E_L = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta L} = \frac{\Delta Q}{Q} \Big/ \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta L} \times \frac{L}{Q} = \frac{Pm_L}{PM_L}$$

حيث:
E_L: مرونة الإنتاج عند التغير في L
Q:الإنتاج الكلي للسلعة
L: عنصر العمل

← في حالة بيانات دالة الإنتاج متصلة (مستمرة):

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \times \frac{L}{Q} = \frac{Pm_L}{PM_L}$$

ب. المرونة الجزئية لعنصر رأس المال:

← في حالة بيانات دالة الإنتاج متقطعة (منفصلة):

$$E_L = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta K} = \frac{\Delta Q}{Q} \Big/ \frac{\Delta K}{K} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta K} \times \frac{K}{Q} = \frac{Pm_K}{PM_K}$$

حيث: E_K: مرونة الإنتاج عند التغير في K
K: عنصر رأس المال

← في حالة بيانات دالة الإنتاج متصلة (مستمرة):

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial K} \times \frac{K}{Q} = \frac{Pm_K}{PM_K}$$

1.6. مرونة الإحلال Elasticity of Substitution: (ملغاة)

نسبة التغير النسبي في عنصري الإنتاج الى التغير النسبي في الإنتاج الحدي لعنصري الإنتاج:

$$E_s = \frac{\%\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\%\Delta\left(\frac{Pm_L}{Pm_K}\right)} = \frac{\%\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\%\Delta TMST_{L,K}} \Rightarrow E_s = \frac{\frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\frac{\Delta TMST_{L,K}}{TMST_{L,K}}}$$

ويمكن كتابتها بالشكل:

$$E_s = \frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right) \times TMST_{L,K}}{\frac{K}{L} \times \Delta TMST_{L,K}}$$

التغير النسبي في عامل الكثافة $\frac{K}{L}$ والناتج عن التعير النسبي في المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{L,K}$.

مثال:

لتكن لدينا دالة الإنتاج التالية $Q = PT = L^{0.5} . K^{0.5}$ حيث أن $P_L = P_K = 20, CT = 2400$

إذا كانت الثنائية المثلى لتعظيم مستوى الإنتاج هي:(L,K)=(60, 60)

المطلوب:

1. ماهي قيمة الإنتاج عند هذه الثنائية؟
2. أوجد مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصري الإنتاج L و K؟

حل المثال:

1. تقدير مستوى الإنتاج المحقق:

من خلال المعطيات وبتعويض قيمة L و K نجد: $Q = PT = 60^{0.5} . 60^{0.5} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q = 60}$

2. حساب مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصري الإنتاج L و K:

أ. مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل L:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \times \frac{L}{Q} \Leftrightarrow E_L = 0.5L^{-0.5}K^{0.5}\frac{L}{Q} = 0.5L^{-0.5}K^{0.5}\frac{L}{L^{0.5}K^{0.5}} \Leftrightarrow E_L = 0.5$$

كما يمكننا التعويض مباشرة بقيم الإنتاج وعناصر الإنتاج:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \times \frac{L}{Q} \Leftrightarrow E_L = 0.5L^{-0.5}K^{0.5}\frac{L}{Q} = 0.5\times 60^{-0.5}60^{0.5}\times\frac{60}{60} \Leftrightarrow E_L = 0.5$$

التفسير الإقتصادي: عند التغير في عنصر العمل بـ 1٪ فإن ذلك يؤدي الى التغير في الإنتاج الكلي بـ 0.5٪

ب. مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر رأس المال K:

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \times \frac{K}{Q} \Leftrightarrow E_K = 0.5L^{0.5}K^{-0.5}\frac{L}{L^{0.5}K^{0.5}} \Leftrightarrow E_K = 0.5$$

أو بنفس الطريقة السابقة يمكننا التعويض بدل الإختزال:

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \times \frac{K}{Q} \Leftrightarrow E_K = 0.5L^{0.5}K^{-0.5}\frac{L}{L^{0.5}K^{0.5}} = 0.5 \times 60^{0.5}60^{-0.5} \times \frac{60}{60} \Leftrightarrow E_K = 0.5$$

التفسير الإقتصادي: عند التغير في عنصر رأس المال بـ 1٪ فإن ذلك يؤدي الى التغير في الإنتاج الكلي بـ 0.5٪

ثانيا: حالة إمكانية تغيير حجم الإنتاج (Q)

يعتمد تحليل النظرية التقليدية على قانونين للإنتاج يحددان سلوك المنتج في المديين القصير والطويل: في المدى القصير قانون تناقص الغلة وفي المدى الطويل قانون (عوائد) غلة الحجم.

7. قانون (عوائد) غلة الإنتاج أو غلة الحجم:

تشير غلة الحجم الى التغير في الإنتاج نتيجة التغير في كل عوامل الإنتاج بنفس النسبة، بعبارة أخرى غلة الحجم توضح نسبة الزيادة في الإنتاج نتيجة الزيادة في كافة عوامل الإنتاج (العمل ورأس المال) معا بنفس النسبة، ويمكن التمييز بين ثلاث حالات لغلة الحجم:

أ. غلة الحجم الثابتة: إذا كانت نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي مساوية لنسبة الزيادة في عناصر الإنتاج المستخدمة، مثلا زيادة كل من عنصري العمل (L) ورأس المال (K) بنسبة 10٪ تؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي بـ 10٪ $(\Delta Q = \Delta P_L, \Delta P_K)$.

ب. غلة الحجم المتزايدة: إذا كانت نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي أكبر من نسبة الزيادة في عناصر الإنتاج المستخدمة، مثلا زيادة كل من عنصري العمل (L) ورأس المال (K) بنسبة 10٪ تؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي بـ 20٪ $(\Delta Q > \Delta P_L, \Delta P_K)$.

جـ. غلة الحجم المتناقصة: إذا كانت نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي أقل من نسبة الزيادة في عناصر الإنتاج المستخدمة، مثلا زيادة كل من عنصري العمل (L) ورأس المال (K) بنسبة 10٪ تؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي بـ 5٪ $(\Delta Q < \Delta P_L, \Delta P_K)$.

8. تجانس الدالة:

تحديد غلة الحجم رياضيا يعتمد على مايعرف بالدوال المتجانسة، حيث تسمح درجة التجانس بمعرفة نوعية غلة الحجم، ويمكن القول أن دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة (n) إذا تحققت العلاقة التالية:

$$f(tL, tK) = t^n f(L, K)$$

حيث:

t: عدد موجب وهو مقدار مضاعفة عنصري الإنتاج (L,K)

t^n: مقدار مضاعفة الإنتاج الكلي (Q)

n: درجة تجانس الدالة

وهذا يعني أن مضاعفة عنصري الإنتاج بمقدار (t) سوف يؤدي الى مضاعفة الإنتاج الكلي (Q) بالمقدار (t^n)، ويمكن أن تأخذ n القيم التالية:

- ✓ n<1 أي أن $t < t^n$ وهو مايعني أن مضاعفة عنصري الإنتاج بنفس النسبة (t) يترتب عنه مضاعفة الإنتاج الكلي بنسبة أكبر $t^{n>1}$ ، وهو ما يمثل غلة الحجم المتزايدة.
- ✓ n=1 أي أن $t = t^n$ وهو مايعني أن نسبة الزيادة في عنصري الإنتاج (t) مساوية لنسبة الزيادة في الإنتاج الكلي $t^{n=1}$ ، وبالتالي غلة الحجم ثابتة.
- ✓ n>1 أي أن $t > t^n$ وهو مايعني أن نسبة الزيادة في عنصري الإنتاج (t) يترتب عنها زيادة بنسبة أقل في الإنتاج الكلي $t^{n<1}$ ، وبالتالي غلة الحجم متناقصة.

هذا ويمكن التأكد من تجانس الدالة من خلال تحقيقها لمتطابقة "أويلر" "Euler" والتي تنص على:

$$\overline{\mathrm{Q}} = nQ = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial L} \times \mathrm{L} + \frac{\partial Q}{\partial K} \times \mathrm{K}$$

9. دوال الإنتاج كوب دوغلاس Cobb Douglass:

من أشهر الدوال المتجانسة دوال الإنتاج كوب دوغلاس والتي تأخذ الشكل التالي:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{A}L^{\alpha}K^{\beta}$$

حيث:

A: معلمة كفاءة الإنتاج (A>0)

β, α: مرونة الإنتاج بالنسبة لكل من العمل ورأس المال

درجة تجانس هذا النوع من الدوال هو $(\alpha + \beta)$، ومنه فنوع غلة الحجم في دوال الكوب دوغلاس يعتمد على قيم $(\alpha + \beta)$:

- ✓ إذا كانت $1 = \alpha + \beta$ فإن غلة الحجم ثابتة
- ✓ إذا كانت $1 < \alpha + \beta$ فإن غلة الحجم متزايدة
- ✓ إذا كانت $1 > \alpha + \beta$ فإن غلة الحجم متناقصة

مثال (1):

لتكن لدينا دالة الإنتاج من الشكل التالي: $\mathrm{Q} = 20\mathrm{KL} - 15K^2 - 4L^2$

المطلوب: حدد درجة تجانس هذه الدالة وماذا تستنتج؟

الحل: درجة تجانس الدالة:

$$\mathrm{f}(\mathrm{tL}, \mathrm{tK}) = 20(t\,K)(t\,L) - 15(tK)^2 - 4(tL)^2$$
$$= t^2 20\,KL - t^2 15k^2 - t^2 4L^2$$
$$= t^2\,(20\mathrm{KL} - 15K^2 - 4L^2)$$
$$= \ t^2\,f(L,K) = \boldsymbol{t^2 Q}$$

وعليه فإن الدالة متجانسة من الدرجة الثانية (2) وهو مايعني أن مضاعفة عنصري الإنتاج العمل(L) ورأس المال (K) بمقدار العدد (t)، سوف يؤدي الى مضاعفة الإنتاج الكلي بالمقدار (t^2).

مثال (2):

لتكن لدينا دالة الإنتاج من الشكل التالي: $Q = LK + 3L^2$

المطلوب: حدد درجة تجانس هذه الدالة وماذا تستنتج؟

الحل: بتطبيق قاعدة التجانس على الدالة:

$$f(tL, tK) = (tL)(tK) + 3(tL)^2$$
$$= t^2LK + 3t^2L^2$$
$$= t^2(LK + 3L^2) = \boldsymbol{t^2Q}$$

وعليه فالدالة متجانسة من الدرجة (2) وغلة الحجم متزايدة