3. منحنى التكلفة المتساوية أو خط التكلفة المتساوية: (خط ميزانية الإنتاج، خط الإنفاق)

خط التكلفة المتساوية هو عبارة عن مجموعة من التوليفات المختلفة من عناصر الإنتاج التي يكون بإستطاعة المؤسسة شرائها في حدود الميزانية المخصصة للإنتاج وأشعار عوامل الإنتاج حيث أن:

$$CT = LP_L + KP_K$$

حيث أن:

CT: الإنفاق الإجمالي للمنت

سعر الوحدة من عنصر العمل (L) هو: P_L ، إجمالي المبلغ المنفق على العمل هو: LP_L

سعر الوحدة من عنصر رأس المال (L) هو: P_K ، إجمالي المبلغ المنفق على رأس المال هو: KP_K

هذا ويمكننا التعبير عن معادلة خط التكاليف المتساوية بالشكل التالي:

$$K = \frac{CT}{P_K} - L\frac{P_L}{P_K}$$

- إذا قرر المنتج إنفاق كامل ميزانيته على شراء عنصر العمل، فبإمكانه شراء مامقداره:

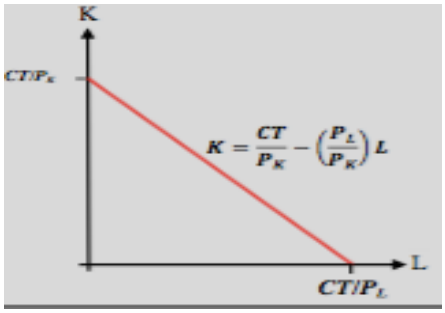
$$K = 0 \Rightarrow L = \frac{CT}{P_L}$$

- إذا قرر المنتج إنفاق كامل ميزانيته على شراء عنصر رأس المال، فبإمكانه شراء مامقداره:

$$L = 0 \Rightarrow K = \frac{CT}{P_K}$$

من خلال الشكل البياني لمنحنى الناتج المتساوي يمكننا أن نميز بين 3 وضعيات من الإنفاق الإجمالي للمنتج لأجل الحصول على الكمية اللازمة لإنتاج سلعة معينة، وتتمثل في:

- ✓ $CT > LP_L + KP_K$ الإنفاق أدنى من الميزانية المخصصة للإنتاج وتمثل المنطقة (A) حيث التوليفات أسفل خط التكاليف المتساوية.
- ✓ $CT = LP_L + KP_K$ الإنفاق يعادل الميزانية المخصصة للإنتاج حيث تقع التوليفات الإنتاجية على خط التكاليف المتساوية (خط الميزانية).
- ✓ $CT < LP_L + KP_K$ الإنفاق أكبر من الميزانية المخصصة للإنتاج وتمثل المنطقة (B) حيث نجد التوليفات الإنتاجية تقع أعلى من خط التكاليف المتساوية.



خط التكاليف المتساوية

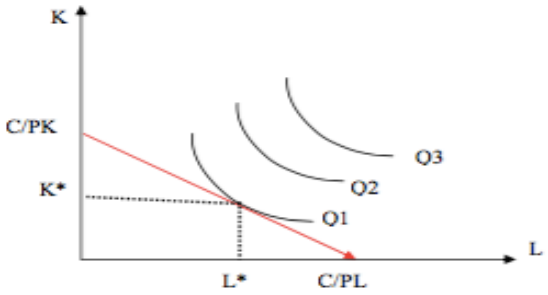
4. توازن المنتج:

يكون المنتج في حالة توازن عندما يصل الى أقصى مستوى إنتاج وبأقل تكلفة ممكنة وذلك للوصول الى التوليفة المثلى من عنصري الإنتاج (L,K)، ويمكننا تحقيق ذلك من خلال:

1.4. التوازن إقتصاديا: عندما ينفق كامل الميزانية المخصصة للإنتاج مع حصوله على أقصى مستوى إنتاج ممكن.

2.4. التوازن بيانيا: عندما يكون منحنى الناتج المتساوي مماسا لمنحنى التكلفة المتساوية أو خط التكلفة، أي عندما يتساوي ميل منحنى الناتج المتساوي مع ميل منحنى التكاليف المتساوية.

$$TMST_{L,K} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K}$$



التوازن البياني للمنتج

3.4. التوازن رياضيا أو جبريا: بافتراض أن المنتج يعتمد على إستخدامات L و K في إنتاج سلعة ما أو تشكيلة من السلع، حيث أن دالة الإنتاج: $Q = f(L, K)$

ويخصص الميزانية CT حيث يتم إنفاقها على عنصري الإنتاج (L, K): $CT = LP_L + KP_K$ وفي ظل أسعار عوامل الإنتاج السائدة في السوق.

بناءا على ماسبق يمكننا تلخيص شروط التوازن في حالتين: حالة تعظيم الإنتاج تحت قيد التكاليف، وحالة تقليل التكاليف تحت قيد الإنتاج.

أولا: في حالة تعظيم الانتاج تحت قيد التكاليف

1. الحل باستخدام طريقة مضاعف لاغرانج: تصاغ دالة لاغرانج في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\mathcal{L} = Q + \lambda(CT - LP_L - KP_K)$$

ويتم حل الدالة بنفس الطريقة التي سبق ودرسناها في نظرية سلوك المستهلك.

1. الحل باستخدام طريقة شرطي التوازن:

$$\begin{cases} \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ CT = LP_L + KP_K \dots\dots (2) \end{cases}$$

مثال (1): بإفتراض أن إنتاج السلعة (X) يعتمد على عاملي رأس المال واليد العاملة، حيث يمكن التعبير عن هذه العلاقة بالدالة الرياضية التالية: $Q = f\left(L, K\right) = L.K$

تقدر الميزانية المخصصة لإنتاج هذه السلعة بـ 200 وحدة نقدية، أما أسعار عوامل الإنتاج فهي 4، 2 على التوالي بالنسبة لليد العاملة ورأس المال.

المطلوب:

1. ماهي التوليفة المثلى من عوامل الإنتاج التي تمكن المنتج من تعظيم مستوى الإنتاج للسعلة (X)؟
2. ماهو مستوى الإنتاج الموافق لهذه التوليفة؟

حل المثال (1):

1. تقدير التوليفة التوازنية المثلى من عنصري الإنتاج رأس المال واليد العاملة التي تحقق أعظم إنتاج:

← أ. بإستعمال طريقة مضاعف لاغرانج:

تعظيم الإنتاج تحت قيد التكاليف

$$\begin{cases} \text{Max Q} = \text{L.K} \\ \text{S.T. } 200 = 4\text{L} + 2\text{K} \end{cases}$$

ويتم صياغة دالة لاغرانج كالتالي:

$$\mathcal{L} = L.K + \lambda(200 - 4L - 2K)$$

لتعظيم هذه الدالة لابد أن تكون المشتقات الجزئية الأولى لها لكل متغير معدومة:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow K - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{K}{4} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow L - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{L}{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 200 - 4L - 2K = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد: $\frac{K}{4} = \frac{L}{2} \Rightarrow K = 2L \dots\dots (4)$

ثم نعوض (4) في المعادلة (3):

$$200 - 4L - 2K = 0 \Leftrightarrow 200 - 4L - 2.2L = 0 \Rightarrow 200 - 8L = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L = 25}$$

نعوض قيمة L في المعادلة (4) فنجد: $K = 2L \Rightarrow K = 2.25 \Rightarrow \boldsymbol{K = 50}$

وبالتالي فإن كميات عوامل الإنتاج التي تحقق أعظم إنتاج ممكن للمنتج في حدود الميزانية المخصصة لذلك وفي ظل أسعار عوامل الإنتاج السائدة في السوق تتمثل في 25 وحدة عمل (L) و50 وحدة رأس مال (K).

ب. بإستعمال طريقة شرطي التوازن: $Q = L.K$ ←

$$\begin{cases} \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ CT = LP_L + KP_K \dots\dots (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{4}{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 200 = 4L - 2K \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

نقوم بحساب لإنتاجية الحدية بالنسبة لعامل رأس المال وعامل العمل ثم نقوم بالتحقق من شرط تساوي نسبة الإنتاجية الحدية بالنسبة لعامل رأس المال واليد العاملة الى نسبة السعرين:

الإنتاجية الحدية بالنسبة لعامل رأس المال: $Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = L$

الإنتاجية الحدية بالنسبة لعامل العمل: $Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = K$

بتعويض النواتج الحدية وأسعار عوامل الإنتاج في الشرط الضروري للتوازن نحصل على المعادلة التالية: $\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \Leftrightarrow \frac{K}{L} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow K = 2L \dots\dots\dots (3)$

بتعويض (3) في معادلة الإنفاق: $CT = LP_L + KP_K$

$$200 = 4L - 2K = 0 \Leftrightarrow 200 = 4L - 2.2L = 0 \Rightarrow 200 = 8L = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L = 25}$$

نعوض قيمة L في المعادلة (3) فنجد: $K = 2L \Rightarrow K = 2\times 25 \Rightarrow \boldsymbol{K = 50}$

وبالتالي فإن كميات عوامل الإنتاج التي تحقق أعظم إنتاج ممكن للمنتج هي 25 وحدة عمل (L) و50 وحدة رأس مال (K).

2. مستوى الإنتاج الأمثل الموافق لهذه التوليفة:

$$Q = L.K = 25\times 50 = 1250 \text{ وحدة}$$