نظرية الإنتاج

Theory Of Production

III. تحليل دالة الإنتاج في المدى الطويل:

في المدى الطويل تتوفر للمنتج إمكانية تغيير جميع عناصر الإنتاج المستخدمة، فيصبح المنتج أمام إشكالية إختيار أحسن توليفة لعناصر الإنتاج من بين كل التوليفات أو التركيبات الممكنة والتي تحقق له أعظم ربح وأدنى تكلفة ممكنة تحت القيود التقنية والإقتصادية. هذا وتتم دراسة دالة الإنتاج في المدى الطويل وفق حالتين:

- **الحالة الأولى:** يفترض فيها تثبيت حجم الإنتاج (Q)، وتغيير عنصري الإنتاج (L,K) وللحفاظ على هذه الفرضية لابد من توفر إمكانية الإحلال بين عنصري الإنتاج العمل (L) ورأس المال (K)، بمعني إذا تم الرفع أو الزيادة في عنصر العمل فإن ذلك يقابله بالضرورة تخفيض في عنصر رأس المال والعكس صحيح وذلك بهدف الحفاظ على ثبات حجم الإنتاج.
- **الحالة الثانية:** في هذه الحالة يفترض إمكانية تغيير حجم الإنتاج (Q) مع تثبيت نسب المزج بين عنصري الإنتاج (L,K) وهو مايطرح إشكالية غلة الحجم وتجانس الدالة.

أولا: حالة تثبيت الإنتاج (Q):

في المدى الطويل لايعتمد الإنتاج على عنصر واحد بل يتعداه الى عناصر إنتاجية عديدة، لكن وبهدف تبسيط التحليل ووفق ما جرت عليه العادة في أدبيات نظرية الإنتاج سنعتمد على فرضية أن إنتاج أي سلعة أو خدمة يتوقف على عنصري العمل (L) ورأس المال (K) فقط لتصبح دالة الإنتاج في المدى الطويل تعبر عن العلاقة التقنية أو التكنولوجية التي تربط بين الإنتاج من جهة والقيود الإقتصادية التي تعبر عن أسعار عناصر الإنتاج من جهة أخرى. تتميز دالة الإنتاج بإظهار خاصية الإحلال والإستبدال بين عنصري الإنتاج (L,K) وتمكن التعبير عنها بالصيغة الرياضية التالية: $Q = f(L, K)$

هذا ويمكن التعبير عن هذه الدالة بيانيا بما يسمى بمنحنى الناتج المتساوي.

1. منحنى الناتج المتساوي (Isoquant):

يتشكل منحنى الناتج المتساوي من مختلف التركيبات من عنصري الإنتاج العمل (L) ورأس المال (K) المتواجدة في الفضاء الإنتاجي للمؤسسة والتي تسمح للمنتج بالحصول على نفس مستوى الإنتاج، وهو يشبه تماما منحنى السواء.

1.1. **خصائص منحنى الناتج المتساوي:** (تقريبا نفس خصائص منحنيات السواء)

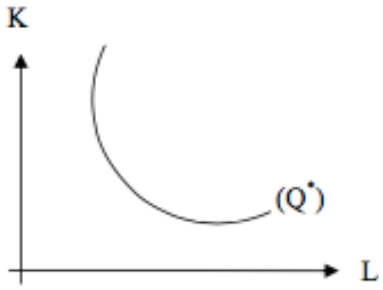
تتمثل خصائص منحنيات الناتج المتساوي فيمايلي:

أ. محدبة بالنسبة لنقطة الأصل (0،0)، وهو مايعكس عملية الإحلال والإستبدال بين عنصري العمل ورأس المال، ويبين قانون تناقص المعدل الحدي للإحلال التقني.

ب. يتميز منحنى الناتج المتساوي بميل سالب وهو مايصطلح عليه المعدل الحدي للإحلال التقني أو الفني (TMST or MRST).

جـ. كلما ابتعدت عن نقطة الأصل أو المبدأ كلما زاد الإنتاج.

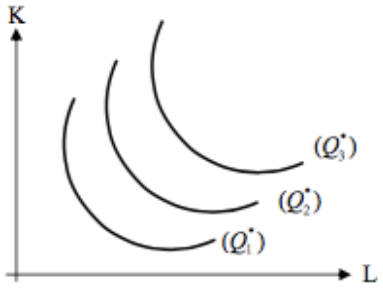
د. منحنيات الناتج المتساوي لا تتقاطع إثباتا لفرضية رشادة المنتج، إذ لايمكن الحصول على مستويين من الإنتاج بتفس التركيبة الإنتاجية.



منحنى الناتج المتساوي

2.1. خرائط الناتج المتساوي:

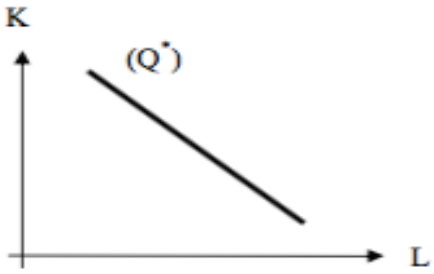
خرائط أو شبكة منحنيات الناتج المتساوي تعبر عن مستويات مختلفة من الإنتاج الكلي للمنتج والتي يمكن الحصول عليها عند الزيادة في عوامل الإنتاج، حيث كلما ابتعد منحنى الناتج المتساوي عن نقطة المبدأ كلما عبر عن مستوى إنتاجي أكبر.



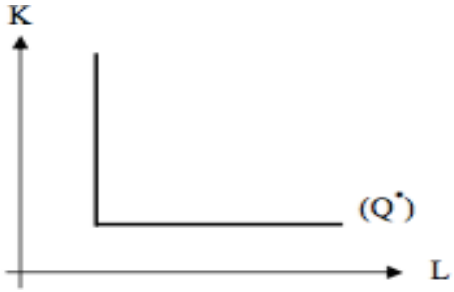
خرائط الناتج المتساوي

3.1. حالات خاصة لمنحنى الناتج المتساوي:

يمكن أن تأخذ منحنيات الناتج المتساوي أشكالا أخرى وفق الحالتين التاليتين:



منحنى الناتج المتساوي في حالة عنصري الانتاج (L,K) بديليلن تماما لبعضهما البعض



منحنى الناتج المتساوي في حالة عنصري الانتاج (L,K) مكملين تماما لبعضهما البعض

2. المعدل الحدي للإحلال التقني، Marginat Rate of Technical Substitution (MRTS):

نرمز له بالرمز MRTS أو TMST وهو عبارة عن عدد الوحدات التي يتنازل عنها المنتج من عنصر إنتاجي مقابل إستخدام وحدة إضافية من العنصر الآخر بشرط الحفاظ على مستوى ثابت من الإنتاج الكلي، أي البقاء على نفس منحنى الناتج المتساوي. هذا ويمثل TMST ميل منحنى الناتج المتساوي.

$\boldsymbol{TMST_{L,K}}$ (المعدل الحدي للإحلال التقني لـ K من أجل L) يشير الى عدد الوحدات التي يتنازل عنها المنتج من K مقابل الحصول على وحدة واحدة إضافية من L مع البقاء على نفس مستوى الإنتاج.

يحسب المعدل الحدي للإحلال التقني بالشكل التالي:

← في حالة بيانات دالة الإنتاج متقطعة (منفصلة): $TMST_{L,K} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \left|\frac{\Delta K}{\Delta L}\right|$

← في حالة بيانات دالة الإنتاج متصلة (مستمرة): $TMST_{L,K} = \frac{-\partial K}{\partial L} = \frac{Pm_L}{Pm_K}$

كما يمكن تقدير المعدل الحدي للإحلال التقني باستخدام أسعار عوامل الإنتاج: $TMST_{L,K} = \frac{P_L}{P_K}$

ومنه:

$$TMST_{L,K} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \left|\frac{\Delta K}{\Delta L}\right| = \frac{-\partial K}{\partial L} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

مثال (1): أحسب المعدل الحدي للإحلال التقني للتوليفات المختلفة لعناصر الإنتاج المبينة في الجدول التالي:

الحالة	العمل (L)	رأس المال (K)	$TMST_{L,K}$	$TMST_{K,L}$
(A)	3	45	—	—
(B)	4	40	5	0.2
(C)	5	36	4	0.25
(D)	6	33	3	0.33
(E)	7	31	2	0.5

← في حالة تقدير معدل إحلال عنصر العمل محل عنصر رأس المال نطبق العلاقة التالية:

$$TMST_{L,K} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \left|\frac{\Delta K}{\Delta L}\right|$$

الحالة (A1): غير ممكنة لعدم معرفة التوليفة المراد إحلالها.

الحالة (B1): $TMST_{L,K} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = -\frac{K_B - K_A}{L_B - L_A} = -\frac{-5}{1} = -(-5) = 5$

← في حالة تقدير معدل إحلال عنصر رأس المال محل عنصر العمل نطبق العلاقة التالية:

$$TMST_{K,L} = \frac{-\Delta L}{\Delta K} = \left|\frac{\Delta L}{\Delta K}\right|$$

الحالة (A2): غير ممكنة لعدم معرفة التوليفة المراد إحلالها.

الحالة (B1): $TMST_{K,L} = \frac{-\Delta L}{\Delta K} = -\frac{L_B - L_A}{K_B - K_A} = -\frac{1}{-5} = -(-0.2) = 0.2$

ومنه نلاحظ أن:

$$TMST_{L,K} \neq TMST_{K,L}$$

$$TMST_{K,L} = \frac{1}{TMST_{L,K}}, \qquad TMST_{L.K} = \frac{1}{TMST_{K,L}}$$

مثال (2): لتكن لدينا الدوال الإنتاجية التالية:

$$Q_1 = K^{0.2}L^{0.5} \qquad , Q_2 = 2L^{\frac{3}{4}}K^{\alpha} \qquad , Q_3 = 2L^{0.5}K^{0.5}$$

المطلوب:

1. أوجد الصيغة الرياضية للمعدل الحدي للإحلال التقني ($TMST_{L,K}$) بالنسبة للدالة (1) و(2)؟

$$TMST_1 = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{0.5K^{0.2}L^{-0.5}}{0.2K^{-0.8}L^{0.5}} = \boldsymbol{\frac{0.5K}{0.2L}}$$

$$TMST_2 = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{2.\frac{3}{4}L^{-\frac{1}{4}}K^{\alpha}}{2.\alpha L^{\frac{3}{4}}K^{\alpha-1}} = \boldsymbol{\frac{3K}{4\alpha L}}$$

2. ماهي قيمة المعدل الحدي للإحلال التقني بالنسبة للدالة (3) إذا كان L=2, $Q_3 = 2$ ؟

$$TMST_{L,K} = \frac{Pm_L}{Pm_K}$$

$$Q_3 = 2L^{0.5}K^{0.5} \Leftrightarrow 2\times 2^{0.5}K^{0.5} = 2 \Leftrightarrow K^{0.5} = \frac{2}{2\times 2^{0.5}} \Leftrightarrow K = \frac{4}{4\times 2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$TMST_3 = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{2\times 0.5L^{-0.5}K^{0.5}}{2\times 0.5L^{0.5}K^{-0.5}} = \frac{K}{L} = \frac{0.5}{2} = \mathbf{0.25}$$

أو باستعمال العلاقة: $TMST_{L,K} = \frac{-\partial K}{\partial L}$

$$Q_3 = 2L^{0.5}K^{0.5} \Leftrightarrow 2L^{0.5}K^{0.5} = 2 \Leftrightarrow L^{0.5}K^{0.5} = 1 \Leftrightarrow K^{0.5} = \frac{1}{L^{0.5}} \Leftrightarrow \boldsymbol{K = \frac{1}{L}}$$

$$TMST_3 = \frac{-\partial K}{\partial L} = -\left(\frac{-1}{L^2}\right) = \frac{1}{L^2} = \frac{1}{2^2} = \mathbf{0.25}$$