Université Djilali BOUNAÂMA-Khemis Miliana | Niveau : $1re$ année LMD
Faculté des Sciences et de la Technologie | Année : $2022 - 2023$
Département de Mathématiques et Informatique | Matière : Algèbre 2

Série 3: Matrices

Exercice 1.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Exprimer A^4 en fonction de A^2, A et I.

Exercice 2.
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A - 2I)^3$, puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de I, A et de A^2.

Exercice 3.
Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit u l'application linéaire qui a un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base (a, b) de $ker(u - Id)$.
3. Donner un vecteur c tel que $ker(u) = vect(c)$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
6. Montrer que $Im(u) = ker(u - Id)$
7. Montrer que $ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4.
Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $u(P) = P + (1 - X)P'$
Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$
1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de u dans β.
3. Déterminer le noyau et l'image de u.

Solutions

Exercice 1.

1.
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

2. $A^3 - A^2 + A - I = O \Leftrightarrow A\left(A^2 - A + I\right) = I$ donc $A^{-1} = A^2 - A + I$
3. $A^3 = A^2 - A + I$ donc

$$A^4 = A\left(A^2 - A + I\right) = A^3 - A^2 + A = \left(A^2 - A + I\right) - A^2 + A = I$$

Exercice 2. On a:

$$\begin{aligned} A - 2I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ (A-2I)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ (A-2I)^3 &= (A-2I)(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui entraine que

$$A^3 - 3 \times 2A^2 + 3 \times 2^2 A - 2^3 I = 0$$

Car A et I commutent.
Ce qui équivaut à

$$A^3 - 6A^2 + 12A - 8I = 0$$

Soit encore

$$A^3 - 6A^2 + 12A = 8I$$

Puis en divisant par 8 et en mettant A en facteur

$$A\left(\frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I\right) = I$$

Ce qui montre que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I$$

Exercice 3.

1. Les coordonnées de $u(x)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de u dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base canonique

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) \in ker(u - Id) \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $x = (x_2 - 2x_3, x_2, x_3) = x_2(1, 1, 0) + x_3(-2, 0, 1)$

On pose $a=(1,1,0)$ et $b=(-2,0,1)$, (a,b) est une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, qui engendrent $ker(u-Id)$, c'est une base de $ker(u-Id)$.

3. Soit $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $x=(x_1,x_2,x_3)$ dans la base canonique

$$\begin{aligned}
x=(x_1,x_2,x_3) &\in ker(u)\Leftrightarrow AX=0\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 4\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2-2x_3=0\\ 2x_1-x_2+4x_3=0\\ x_1-x_2+3x_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2=2x_3\\ 2x_1-2x_3+4x_3=0\\ x_1-2x_3+3x_3=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2=2x_3\\ 2x_1+2x_3=0\\ x_1+x_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=-x_3\\ x_2=2x_3\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc $x=(-x_3,2x_3,x_3)$, si on pose $c=(-1,2,1)$ alors $ker(u)=Vect(c)$

4.

$$\begin{aligned}
det(a,b,c) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\
&= -2-(-2+1)=-1\neq 0
\end{aligned}$$

En développant par rapport à la première colonne, donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. $u(a)-a=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow u(a)=a$, de même $u(b)=b$ et $u(c)=0_{\mathbb{R}^3}$ donc

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

6. D'après la matrice de u dans la base $\beta', Im(u)=Vect(a,b)=ker(u-Id)$

7. D'après le théorème du rang

$$dim(keru)+dim(Imu)=dim\left(\mathbb{R}^3\right)$$

Il reste à montrer que l'intersection de $ker(u)$ et de $Im(u)$ est le vecteur nul.

$$\begin{aligned}
x &\in ker(u)\cap Im(u)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in Im(u)\\ x\in ker(u)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in ker(u)\\ x\in ker(u-Id)\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\\ u(x)-x=0_{\mathbb{R}^3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\\ u(x)=x\end{array}\right. \Leftrightarrow x=0_{\mathbb{R}^3}
\end{aligned}$$

On a donc $ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$

Exercice 4.

1.

$$\begin{aligned}
&u(\alpha P+\beta Q)=\alpha P+\beta Q+(1-X)(\alpha P+\beta Q)' \\
&=\alpha P+\beta Q+(1-X)\left(\alpha P'+\beta Q'\right) \\
&=\alpha\left(P+(1-X)P'\right)+\beta\left(Q+(1-X)Q'\right)=\alpha u(P)+\beta u(Q)
\end{aligned}$$

Donc u est une application linéaire

$$d^\circ P \leq 2 \Rightarrow d^\circ u(P) \leq 2$$

Elle va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.

$$\begin{aligned}
&u(1)=1+(1-X)\times 0=1 \\
&u(X)=X+(1-X)\times 1=1 \\
&u\left(X^2\right)=X^2+(1-X)\times 2X=2X-X^2 \\
&A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. $P \in ker(u)$

$$\begin{aligned}
u(P) &= 0 \Leftrightarrow u\left(aX^2+bX+c\right)=au\left(X^2\right)+bu(X)+cu(1) \\
&= a\left(2X-X^2\right)+b+c=0 \\
&\Leftrightarrow -aX^2+2aX+b+c=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ c=-b \end{array}\right. \\
P &= bX-b=b(X-1)
\end{aligned}$$

Donc $ker(u)$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X-1$.

$$\begin{aligned}
Im(u) &= Vect\left(u(1),u(X),u\left(X^2\right)\right)=Vect\left(1,1,2X-X^2\right) \\
&= Vect\left(1,2X-X^2\right)
\end{aligned}$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre (et génératrice) de $Im(u)$ donc une base de $Im(u)$.