حل سلسلة * نتائج في المدى الطويل

التمرين الأول:

لكي تكون الدالة متجانسة يجب أن يتحقق الشرط التالي: $F(tL,tK)=t^n F(L,K)$

الدالة الأولى:

$Q=K^4L$

$F(tK,tL)=(tK)^4(tL) \Leftrightarrow F(tK,tL)=t^5K^4L$

$\Leftrightarrow F(tK,tL)=t^5F(K,L)$

الدالة متجانسة من الدرجة الخامسة.

الدالة الثانية:

$Q=K+3L$

$F(tK,tL)=tK+3(tL) \Leftrightarrow F(tK,tL)=t(K+3L)$

$\Leftrightarrow F(tK,tL)=tF(K,L)$

الدالة متجانسة من الدرجة الأولى.

الدالة الثالثة:

$Q=KL+K+2L$

$F(tK,tL)=(tK)(tL)+tK+2(tL)$

$\Leftrightarrow F(tK,tL)=t^2KL+tK+2tL$

$=t^2KL+t(K+2L)$

$=t[tKL+(K+L)]$

الدالة لا تحقق شرط التوازن، وعليه فالدالة غير متجانسة

الدالة الرابعة:

$Q=2K(L-1)$

$F(tK,tL)=2(tK)(tL-1)$

الدالة لا تحقق شرط التجانس، وعليه فهي غير متجانسة

الدالة الخامسة:

$Q=\frac{1}{3}K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$

$F(tK,tL)=\frac{1}{3}(tK)^{\frac{1}{2}}(tL)^{\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow F(tK,tL)=\frac{1}{3}t^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow F(tK,tL)=t^{\frac{3}{4}}.F(K,L)$

الدالة متجانسة من الدرجة $\frac{3}{4}$

الدالة السادسة:

$Q=\frac{2}{3}K^{\frac{4}{5}}L^{\frac{1}{5}}$

$F(tK,tL)=\frac{2}{3}(tK)^{4/5}(tL)^{\frac{1}{5}}$

$\Leftrightarrow F(tK,tL)=\frac{2}{3}t^{\frac{4}{5}}K^{\frac{4}{5}}t^{\frac{1}{5}}L^{\frac{1}{5}}=\frac{2}{3}tK^{\frac{4}{5}}L^{\frac{1}{5}}$

$\Leftrightarrow F(tK,tL)=t.F(K,L)$.

الدالة متجانسة من الدرجة الأولى.

الدالة السابعة:

$Q=2K^2+2L$

$F(tK,tL)=2(tK)^2+2(tL)$

$\Leftrightarrow F(tK,tL)=2t^2K^2+2tL$

$=t(2tK^2+2L)$

الدالة لا تحقق شرط التوازن، وعليه فالدالة غير متجانسة

الدالة الثامنة:

$Q=\frac{5}{9}K^3L^2$

$F(tK,tL)=\frac{5}{9}(tK)^3+(tL)^2 \Leftrightarrow F(tK,tL)=\frac{5}{9}t^5K^3L^2$

$\Leftrightarrow F(tK,tL)=t^5F(K,L)$

الدالة متجانسة من الدرجة الخامسة.

التمرين الثاني:

$Q=bL^\alpha K^\beta$

1- تحديد نوع الدالة: تنتمي هذه الدالة إلى فئة دوال كوب دوغلاس

2- حساب α و β بالاعتماد على أن مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل تساوي 0.6 ودالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الثانية:

- $E_L=\alpha.\Gamma=\alpha$

- $Q'=f(tL,tK)=t^2f(L,K)$

$Q'=f(tL,tK)=b(tL)^\alpha(tK)^\beta$ ولدينا:

$=t^{\alpha+\beta}bL^\alpha K^\beta$

$=t^{\alpha+\beta}f(L,K)$

$\Leftrightarrow t^{\alpha+\beta}=t^2 \Rightarrow \alpha+\beta=2 \Rightarrow \boxed{\beta=1,5}$

3- باعتبار $b=2$ ، $\beta=\frac{1}{2}$ ، $\alpha=\frac{3}{2}$ وإيجاد درجة تجانس هذه الدالة:

$Q=2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}}$

$Q'=f(tL,tK)=2(tL)^{\frac{3}{2}}(tK)^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow f(tL,tK)=t^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}}$

$=t^2f(L,K)$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية.
وتقبل غلة حجم متزايد (مردود سلمي متزايد)

4- دوال تناهيات المتوسطة والحدية لعاملي L و K:

أ- تقدير دوال تناهيات الحدية Pm_L وتناهيات المتوسطة PM_L لعنصر العمل:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial (2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}})}{\partial L} = \boxed{3L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}$$

$$PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{L} = \boxed{2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}$$

ب- تقدير دوال تناهيات الحدية Pm_K وتناهيات المتوسطة PM_L لعنصر رأس المال:

$$Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial (2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}})}{\partial K} = 2 \cdot \frac{1}{2} L^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\boxed{Pm_K = L^{\frac{3}{2}}K^{-\frac{1}{2}}}$$

$$PM_K = \frac{Q}{K} = \frac{2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{K} = \boxed{2L^{\frac{3}{2}}K^{-\frac{1}{2}}}$$

5- تقدير وتحليل مرونات دالة الإنتاج:

أ- مرونة الإنتاج الجزئية بالنسبة لعنصر العمل:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{Pm_L}{PM_L}$$

باستعمال دوال تناهيات المتوسط الجاهزة في السؤال (4):

$$E_L = \frac{3L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2} = \alpha$$

ب- مرونة الإنتاج الجزئية بالنسبة لعنصر رأس المال:

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{Pm_K}{PM_K}$$

باستعمال دوال التناهيات في السؤال (4) نجد:

$$E_K = \frac{L^{\frac{3}{2}}K^{-\frac{1}{2}}}{2L^{\frac{3}{2}}K^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} = \beta$$

ج- مرونة الإنتاج الكلي:

$$E_L + E_K = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

نلاحظ أن مجموع المرونتين = درجة تجانس الدالة.

6- صيغة المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{L,K}$:

$$TMST_{L,K} = \frac{Pm_L}{Pm_K} \Leftrightarrow TMST_{L,K} = \frac{3L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{3}{2}}K^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow TMST_{L,K} = \frac{3K^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{3}{2}}L^{-\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{3K}{L}}$$

7- المسار المثالي للتوسع:

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{3K}{L} = \frac{9}{3} \Rightarrow 9K = 9L$$

$TMST_{L,K}$ دفعة 1

$$\Rightarrow \boxed{K = L}$$

يعكس المسار المثالي للتوسع تركيبات عناصر الإنتاج (L, K) التي تتحقق أعظم إنتاج في حالة بقاء أسعار هذه العناصر ثابتة، حيث يتبع المنتج هذا المسار إذا أراد زيادة طاقته الإنتاجية.

8- إيجاد الكميات المثلى من عوامل الإنتاج التي تعظم الإنتاج الكلي للمؤسسة:

$$P_L = 9 \quad P_K = 3 \quad ، \quad CT = 500$$

$$\begin{cases} \text{Max } Q = 2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}} \\ \text{s.t } 500 = 9L + 3K \quad (CT = L.P_L + K.P_K) \end{cases}$$

باستخدام طريقة شرطي التوازن:

$$\begin{cases} \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \quad \dots (1) \\ CT = L.P_L + K.P_K \quad \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3K}{4} = \frac{9}{3} \Rightarrow \dots (1) \\ 500 = 9L + 3K \dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد $K = L$ (3) صيغة المسار المثالي للتوسع

نعوض (3) في المعادلة (2) نجد:

التمرين الثالث

$Q = 2(KL)^{\frac{1}{2}}$

1- دوال الانتاج الحدي والانتاج المتوسط لعوامل L و K

- دالة الانتاج الحدي للعامل:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 2 \cdot \frac{1}{2} K^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

- دالة الانتاج الحدي لرأس المال:

$$Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 2 \cdot \frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = \frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$$

- دالة الانتاج المتوسط للعمل:

$$PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{L} = 2\frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} = 2\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

- دالة الانتاج المتوسط لرأس المال:

$$PM_K = \frac{Q}{L} = \frac{2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{K} = 2\frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} = 2\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$$

2- إيجاد توليفة العوامل حجم رأس المال والعمل اللازمين لانتاج 100 وحدة من المنتج علما أن: $P_L = 9,\ P_K = 4$

لدينا: $Q = 2(KL)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 100 = 2(KL)^{\frac{1}{2}}$

ودالة التكاليف: $CT = 9L + 4K$

باستخدام طريقة مضاعف لاغرانج لإيجاد كل من حجم العوامل رأس المال:

كتابة التكاليف نتبع فيه الخطوات:

$$\begin{cases} \text{Min } CT = 9L + 4K \\ \text{s.t: } 100 = 2(KL)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

ونقوم بصياغة معادلة لاغرانج كما يلي:

$$\mathcal{L} = 9L + 4K + \lambda\left(100 - 2(KL)^{\frac{1}{2}}\right)$$

نقوم بحل هذه الدالة بإيجاد المشتقات الجزئية ثم نعدمها:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow 9 - \lambda\left(\frac{K}{L}\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{\left(\frac{K}{L}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \lambda = 9\left(\frac{L}{K}\right)^2 \quad \cdots (1)$$

$$500 = 9L + 3L \Rightarrow 500 = 12L$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 41,66}$$

$$K = L = 41,66$$

ومنه فإن التركيبة من عنصري العوامل المثلى التي تحقق أعظم إنتاج ممكن في ظل المعطيات هي $(L, K) = (41,66 ; 41,66)$

مستوى الإنتاج الأمثل:

$$Q_{max} = f(L,K) = 2(41,66)^{\frac{1}{2}}(41,66)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{Q_{max} = 3471}$$

3- الحد الأدنى من التكاليف الموافقة لإنتاج قدره 300 وحدة:

$$\begin{cases} CT_{Min} = 9L + 3K \\ s.t: 300 = 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

باستخدام شرطي التوازن:

$$\begin{cases} \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \quad \cdots (1) \\ Q = f(L,K) \quad \cdots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3K}{4} = \frac{9}{3} \quad \cdots (1) \\ 300 = 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} \quad \cdots (2) \end{cases}$$

من الشرط الأول نجد $K = L \quad \cdots (3)$

نعوض (3) في (2) نجد:

$$300 = 2L^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 300 = 2L^2$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 12,24}$$

$$\boxed{K = 12,24}$$ ومنه

الحد الأدنى من التكاليف:

$$CT_{Min} = 9L + 3K$$

$$\Rightarrow CT_{min} = 9(12,24) + 3(12,24)$$

$$\Rightarrow \boxed{CT_{Min} = 147}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} - 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}}{9} \quad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}}{4} \quad \cdots (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 504 - 9L - 4K = 0 \quad \cdots (3)$$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد:

$$\frac{\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}}{9} = \frac{\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}}{4} \Rightarrow 4\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = 9\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 4 = 9\frac{L}{K} \Rightarrow \boxed{L = \frac{4K}{9}} \quad \cdots (4)$$

بتعويض المعادلة (4) عن قيمة L في المعادلة (3) نجد:

$$504 - 9\left(\frac{4K}{9}\right) - 4K = 0$$

$$\Rightarrow 504 - 8K = 0 \Rightarrow \boxed{K = 63}$$

ومنه

$$L = \frac{4K}{9} \Rightarrow L = \frac{4 \times 63}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 28}$$

ومنه حجم وهيكل الإنتاج الموافق لتكلفة قدرها 504 ون باستعمال 63 وحدة من رأس المال و 28 وحدة عمل هو:

$$Q = 2(LK)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Q = 2(28 \cdot 63)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q^* = 84}$$

4- مقدار الربح المحقق إذا كان سعر بيع الوحدة المنتجة هو 12 وحدة نقدية:

الربح = إيراد الكلي - التكلفة الكلية.

* إيراد الكلي = سعر الوحدة الواحدة × الكمية المباعة.

* $TR = P \times Q$

$TR = 12 \times 84 = 1008$

الربح $\Pi = TR - TC = 1008 - 504 = \boxed{504}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow 4 - \lambda\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \lambda = 4\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 100 - 2(KL)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \cdots (3)$$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد:

$$9\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = 4\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$9\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \Big/ \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow 9\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{9L}{K} = 4 \Rightarrow \boxed{L = \frac{4K}{9}} \quad \cdots (4)$$

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (3) نجد:

$$100 - 2K^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4K}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 100 - 2K\frac{2}{3} = 0 \Rightarrow 100 - \frac{4K}{3} = 0$$

$$\Rightarrow K = \frac{300}{4} \Rightarrow \boxed{K = 75}$$

$$L = \frac{4K}{9} \Rightarrow \boxed{L = \frac{100}{3}}$$

ومنه نجد التوليفة التي تحقق حجم إنتاج قدره 100 وحدة هي:

$$(L, K) = \left(\frac{100}{3}, 75\right)$$

3- إيجاد حجم وهيكل الإنتاج الموافق لتكلفة قدرها 504 وحدة نقدية:

في هذه الحالة فالمنتج يعظم دالة الإنتاج في وجود قيد التكاليف:

$$\begin{cases} \text{Max } Q = 2(LK)^{\frac{1}{2}} \\ \text{S.t: } 504 = 9L + 4K \end{cases}$$

بصياغة معادلة لاغرانج:

$$\mathcal{L} = 2(LK)^{\frac{1}{2}} + \lambda(504 - 9L - 4K)$$

نشتق ونعدم المشتقات الجزئية:

واجب: إعادة حل السؤال ② و ③ باستعمال طريقة شرط التوازن.

التمرين الرابع:

دالة الإنتاج: $Q = 4L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}$

1- طبيعة غلة الحجم:

دالة الإنتاج المعطاة هي من نوع كوب دوغلاس

$Q = 4L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}$

حيث: درجة تجانسها هي

$\alpha + \beta = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

ومنه لدينا غلة حجم ثابتة حيث α و β يمثلان مرونتي الإنتاج الجزئية بالنسبة لعاملي الإنتاج L و K على التوالي.

← بما أن غلة الحجم ثابتة فهذا معناه مضاعفة عوامل الإنتاج هذا (مثلا) يؤدي إلى مضاعفة الإنتاج الكلي بنفس النسبة.

غلة حجم ثابتة معناه زيادة عوامل الإنتاج بنفس النسبة (مثلا) يؤدي إلى زيادة مساوية في الإنتاج.

2- إيجاد المسار الأمثل للتوسع:

$$\frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K}$$

أولا نقوم بحساب دوال الإنتاج الحدي لكل من العاملين كما يلي:

$$P_{mL} = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial(4L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}})}{\partial L}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{3} L^{-\frac{2}{3}} K^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} L^{-\frac{2}{3}} K^{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{P_{mL} = \frac{4}{3}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$P_{mK} = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial 4L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}}{\partial K} = 4 \cdot \frac{2}{3} L^{\frac{1}{3}} K^{-\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{P_{mK} = \frac{8}{3}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K} \Leftrightarrow \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{8}{3}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{K}{2L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \boxed{K = \frac{2L P_L}{P_K}}$$

وهي معادلة مسار التوسع

← يعكس المسار الأمثل للتوسع توليفات عناصر الإنتاج (L, K) التي تحقق أدنى تكلفة إنتاج في حالة بقاء عناصر أسعار عناصر (عوامل) الإنتاج ثابتة وفي بيانات عين التكلفة الكلية ويتبع المنتج هذا المسار في المدى الطويل إذا أراد زيادة كمية الإنتاج.

3- إيجاد دوال الطلب على عوامل الإنتاج L و K:

سنعمل على استعمال شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K} \quad \dots ① \\ CT = L P_L + K P_K \quad \dots ② \end{cases}$$

الشرط الأول نأخذ معادلة المسار الأمثل للتوسع

$$\frac{K}{2L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \boxed{K = \frac{2L P_L}{P_K}} \quad \dots ③$$

بتعويض المعادلة ③ في المعادلة ② دالة التكاليف المتساوية نجد:

$$CT = L P_L + \frac{2L P_L}{P_K} P_K \Rightarrow CT = 3L P_L$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{CT}{3P_L}}$$ دالة الطلب على العمل

نعوض دالة الطلب على العمل في الدالة ③ نجد:

$$K = \frac{2\frac{CT}{3P_L} \cdot P_L}{P_K} \Rightarrow \boxed{K = \frac{2CT}{3P_K}}$$

دالة الطلب على رأس المال

التمرين الخامس

دالة الانتاج: $Q=(L-1)^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}$; $L>1$

1- نتحديد معادلة منحنى الناتج المتساوي عند مستوى الانتاج $Q=1$ وتمثيلها بيانيا:

معادلة منحنى الناتج المتساوي:

$Q=(L-1)^{\frac{1}{4}}.K^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 1=(L-1)^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow 1^4=\left[(L-1)^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}\right]^4$

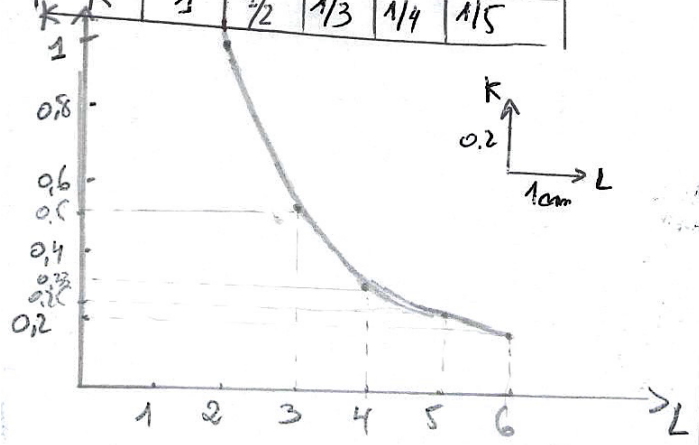
$\Leftrightarrow 1=(L-1)K$

$\Leftrightarrow \boxed{K=\frac{1}{L-1}}$ معادلة منحنى الناتج المتساوي

التمثيل البياني:

الجدول المساعد:

L	2	3	4	5	6
K	1	1/2	1/3	1/4	1/5



التمثيل البياني لمنحنى الناتج المتساوي

2- التوليفة المثلى من التقنيات عند مستوى انتاج $Q=1$ تحقق أقل تكلفة ممكنة:

سعر وحدة رأس المال: $P_K=2$

سعر وحدة العمل: $P_L=3$

يتحدد التوازن (حيث التكاليف الحدية) عند ما يمس منحنى التكاليف المتساوية منحنى الناتج المتساوي وعند نقطة المماس يكون ميل المنحنيين واحد:

(1b) $\frac{-\partial K}{\partial L}=\frac{P_L}{P_K}$

نحسب أولا ميل منحنى الناتج المتساوي $\frac{-\partial K}{\partial L}$

4- حجم الانتاج المثل الموافق لتكلفة الإنتاج قدرها 48 و.ن:

$P_K=8$ ، $P_L=4$

باستعمال دوال الطلب المحصل عليها في السؤال (3) نجد:

$L=\frac{C\bar{T}}{3P_L} \Rightarrow L=\frac{48}{3.4} \Rightarrow \boxed{L=4}$

$K=\frac{2C\bar{T}}{3P_K} \Rightarrow K=\frac{2.48}{3.8} \Rightarrow \boxed{K=4}$

وعليه فإن التركيبة من عنصري الانتاج التي تحقق أفضل إنتاج في خط المعطيات هي:

$(L,K)=(4,4)$.

مستوى الانتاج المثل:

بالتعويض في دالة الانتاج نجد:

$Q=4L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow Q=4.(4)^{\frac{1}{3}}(4)^{\frac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow Q=4.4^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=4.4$

$\Leftrightarrow \boxed{Q=16}$

5- المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{L,K}$ عند نقطة التوازن:

المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{L,K}$ عند التوازن يساوي نسبة أسعار عوامل الانتاج:

$TMST_{L,K}=\frac{P_L}{P_K}=\frac{4}{8}=\boxed{\frac{1}{2}}$

التفسير اقتصادي: للحصول على وحدة إضافية من عنصر العمل (L) يتخلى المنتج عن $\frac{1}{2}$ وحدة من عنصر رأس المال (K) وذلك للبقاء على نفس منحنى الناتج المتساوي (نفس مستوى الانتاج).

$$-\frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{\partial\left(\frac{2}{L-1}\right)}{\partial L}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{(1)'(L-1) - (L-1)'(1)}{(L-1)^2}\right) = -\frac{-1}{(L-1)^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{1}{(L-1)^2}$$

وضع التوازن للمنتج:

ميل منحنى الكمية المتساوية = ميل منحنى التكاليف المتساوية

$$\frac{1}{(L-1)^2} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (L-1)^2 \times 3 = 2$$

$$\Leftrightarrow (L^2 + 2L + 1) \times 3 = 2$$

$$\Leftrightarrow 3L^2 - 6L + 3 = 2$$

$$\Leftrightarrow 3L^2 - 6L + 1 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية نحسب المميز:

$$\Delta = (-6)^2 - 4(3)(1) = 24$$

$$\sqrt{\Delta} \simeq 4,9$$

$$L_1 = \frac{-(-6) + 4,9}{6} \Leftrightarrow L_1 = 1,817$$ حل مقبول

$$L_2 = \frac{-(-6) - 4,9}{6} \Leftrightarrow L_1 = 0,183 < 1$$ حل مرفوض لأنه:

$$K = \frac{1}{L-1} \Rightarrow K = \frac{1}{1,817 - 1}$$

$$\Rightarrow K = 1,224$$

مستوى التكاليف: بالتعويض في معادلة التكاليف المتساوية نجد:

$$CT = L \cdot P_L + K \cdot P_K$$

$$CT = 1,817 \times 3 + 1,224 \times 2 \simeq 7,9$$ (2b)

* ملاحظة: يمكن استعمال الشرط الأول للتوازن للتحصل على نتيجة كل من L و K:

$$\begin{cases} \frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K} \quad \dots (1) \\ 1 = (L-1)^{\frac{1}{4}} \cdot K^{\frac{1}{4}} \quad \dots (2) \end{cases}$$ الشرط الثاني

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4}(L-1)^{-\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}(L-1)^{\frac{1}{4}} K^{-\frac{3}{4}}} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{K}{L-1} = \frac{3}{2} \quad (3) \qquad K = \frac{1}{L-1} \quad (4)$$

نعوض العلاقة (4) في العلاقة (3) نجد:

$$(3) \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{L-1}\right)}{L-1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{(L-1)^2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(L^2 - 2L + 1)} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3L^2 - 6L + 3 = 2 \Leftrightarrow 3L^2 - 6L + 1 = 0$$

نفس مراحل الحل في الطريقة السابقة نحسب المميز ونجد الحلول (حل مقبول وحل مرفوض لأنه أقل من الواحد).

التمرين السادس

دالة الإنتاج: $Q = K^2 - KL + 2L^2 = F(K,L)$

1- تقدير درجة تجانس الدالة:

$F(tK,tL) = (tK)^2 - (tK)(tL) + 2(tL)^2$

$\Leftrightarrow F(tK,tL) = t^2K^2 - t^2KL + 2t^2L^2$

$\Leftrightarrow F(tK,tL) = t^2[K^2 - KL + 2L^2]$

$\Leftrightarrow F(tK,tL) = t^2 \cdot Q = t^2 f(K,L)$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية

ومنه فعلت الكميتين متزايدة وبالتالي فزيادة عناصر الإنتاج بـ 1% يؤدي إلى زيادة الإنتاج بـ 2%.

2- أمثل إنتاج المؤسسة إذا كانت ميزانيتها تقدر بـ 100 وحدة نقدية:

$P_K = 2$ ، $P_L = 4$

أولا نتحقق هل التركيب عناصر الإنتاج (K,L) التي تحقق أعظم إنتاج باستخدام طريقة شرطي التوازن:

$$\begin{cases} \frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K} \quad \cdots (1) \\ CT = LP_L + KP_K \quad \cdots (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{4}{2} \quad \cdots (1) \\ 100 = 4L + 2K \quad \cdots (2) \end{cases}$$

$$\frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \frac{-K+4L}{2K-L} = 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K = \frac{6}{5}L} \quad \cdots (3)$$

$$P_{mL} = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial(K^2 - KL + 2L^2)}{\partial L} = -K + 4L$$

$$P_{mK} = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial(K^2 - KL + 2L^2)}{\partial K} = 2K - L$$

بتعويض (3) في المعادلة (2) نجد:

$$100 = 4L + 2 \cdot \frac{6}{5}L \Leftrightarrow 100 = \frac{32L}{5}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L \simeq 15,63}$$

ومنه:

$$K = \frac{6}{5}L = \frac{6}{5}(15,63)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K = 18,75}$$

ومنه التركيب التوازني لعناصر الإنتاج هي:

$(L,K) = (15,63 \ ; \ 18,75)$.

مستوى الإنتاج المثلى:

$$Q = (18,75)^2 - (18,75)(15,63) + 2(15,63)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Q^* = 547,1}$$

3- تقدير مختلف مرونات دالة الإنتاج:

مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = -K + 4L \times \frac{L}{K^2 - KL + 2L^2}$$

$$\boxed{E_L = \frac{-KL + 4L^2}{K^2 - KL + 2L^2}}$$

مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال:

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = 2K - L \times \frac{K}{K^2 - KL + 2L^2}$$

$$\boxed{E_K = \frac{2K^2 - LK}{K^2 - KL + 2L^2}}$$

من خلال تقدير المرونات الجزئية لكل من العمل ورأس المال نلاحظ أن:

مرونة تركيب العمل ورأس المال مرتبطة بكمية العمل ورأس المال.

مجموع المرونتين = درجة تجانس الدالة:

$$E_L + E_K = \frac{-KL + 4L^2}{K^2 - KL + 2L^2} + \frac{2K^2 - KL}{K^2 - KL + 2L^2}$$

$$= \frac{2K^2 - 2KL + 4L^2}{K^2 - KL + 2L^2} = \boxed{2}$$

وهي مرونة الإنتاج الكلي في نطاق الطويل.

التمرين السابع:

$Q = F(L,K) = 100 L^{0,7} K^{0,3}$

1- نحدد درجة تجانس الدالة:

دالة الإنتاج المعطاة هي من نوع كوب دوغلاس وبالتالي فالدالة متجانسة من الدرجة الأولى $\alpha + \beta = 0,7 + 0,3 = 1$

ومنه لدينا غلة الحجم ثابتة حيث α و β يمثلان مرونتي الإنتاج بالنسبة لعاملي الإنتاج L و K على التوالي.

التفسير الاقتصادي لغلة الحجم الثابت:

عند زيادة عوامل الإنتاج بنفس النسبة (مثلا بـ 1%) زيادة مساوية لها في الإنتاج الكلي في المدى الطويل.

2- حجم الإنتاج الأمثل

التوليفة المثلى من عناصر الإنتاج:

$P_L = 50$

$P_K = 100$

$CT = 2500$

$$\begin{cases} Max\ Q = 100 L^{0,7} K^{0,3} \\ S.t:\ 2500 = 50L + 100K \end{cases}$$

يتم صياغة معادلة لاغرانج:

$$\mathcal{L} = 100 L^{0,7} K^{0,3} + \lambda (2500 - 50L - 100K)$$

نقوم بدالة لاغرانج بحساب المشتقات الجزئية بالنسبة لكل من L و K و λ ونضعها تساوي الصفر:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow 70 L^{-0,3} K^{0,3} - 50\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{5} L^{-0,3} K^{0,3} \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow 30 L^{0,7} K^{-0,7} - 100\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{10} L^{0,7} K^{-0,7} \quad \ldots (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 2500 - 50L - 100K = 0 \quad \ldots (3)$$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد (بعد القسمة أعلاه):

$$\frac{3}{10} L^{0,7} K^{-0,7} = \frac{7}{5} L^{-0,3} K^{0,3}$$

$$\frac{\frac{3}{10} L^{0,7}}{L^{-0,3}} = \frac{\frac{7}{5} K^{0,3}}{K^{0,7}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10} L = \frac{7}{5} K \Rightarrow L = \frac{70}{15} K$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{14}{3} K} \quad \ldots (4)$$

نعوض $L = \frac{14}{3} K$ في المعادلة (3) نجد:

$$2500 - 50\left(\frac{14}{3}\right)K - 100K = 0$$

$$\Leftrightarrow 2500 - \frac{700}{3} K - 100K = 0$$

$$\Leftrightarrow 2500 - \frac{1000}{3} K = 0$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{7500}{100} \Leftrightarrow \boxed{K = 7,5}$$

ومنه

$$L = \frac{14}{3} K \Rightarrow L = \frac{14}{3} \times 7,5$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 35}$$

التركيبة المثلى من عوامل الإنتاج هي:

$$\boxed{(L,K) = (35;\ 7,5)}$$

حجم الإنتاج الأمثل:

$$Q = 100(35)^{0,7}(7,5)^{0,3} = 2203,84.$$

3- الأثر الكلي للإحلال التقني عند التوازن:

$$TMST_{L,K} = \frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$TMST_{L,K} = \frac{7K}{3L} = \boxed{0,5}$$

أو $TMST_{L,K} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = \boxed{0,5}$

التفسير الاقتصادي:

للحصول على وحدة واحدة إضافية من عنصر العمل (L) لابد للمنتج من التخلي عن $0,5$ وحدة من عنصر رأس المال (K) للحفاظ على نفس مستوى الإنتاج المتساوي (نفس مستوى الإنتاج).

4- تحديد قيمة المردودية الكلية للانتاج:

$E = E_L + E_K = 0,7 + 0,3 = 1$

(الدالة الإنتاج دوغلاس).

5- تحديد العلاقة بين $TMST_{L,K}$ والمردودات الجزئية:

لدينا:

- $E_L = \frac{P_{m_L}}{PM_L} \Rightarrow P_{m_L} = E_L \cdot PM_L$

- $E_K = \frac{P_{m_K}}{PM_K} \Rightarrow P_{m_K} = E_K \cdot PM_K$

$\rightarrow TMST = \frac{P_{m_L}}{P_{m_K}} = \frac{E_L \cdot PM_L}{E_K \cdot PM_K}$.