الفائدة المركبة 1(الرسملة، عناصر الفائدة المركبة،معدلات الفائدة المتناسبة, و المتكافئة)

1. الرسملة : Capitalisation

1-1.تعريف

نقول عن أصل أو رأس مال , أنه موظف بفائدة مركبة , عندما تضاف الفائدة البسيطة للفترة الأولى إلى رأس المال , لكي تنتج بدورها فائدة خلال الفترة الثانية , و هكذا ..... في نهاية كل فترة تضاف الفائدة إلى رأس المال ليتكون رأسمال جديد لبداية الفترة الموالية , و تسمي عملية الرسملة (capitalisation) .

2-1.القيمة المحصلة: la valeur aquise

نرمز لِـ :

* A_0 الأصل أو رأس المال في بداية السنة الأولى

* i معدل الفائدة

* n المدة الزمنية أو عدد السنوات (الفترات)

* A_n القيمة المحصلة أو الجملة في نهاية السنة

السنة	رأس المال في بداية السنة	فائدة السنة	رأس المال في نهاية السنة
1	A_0	$A_0.i$	$A_1=A_0+A_0.i=A_0(1+i)^1$
2	$A_0(1+i)$	$A_0(1+i).i$	$A_2=A_0(1+i)+A_0(1+i).i=A_0(1+i)(1+i)=A_0(1+i)^2$
3	$A_0(1+i)^2$	$A_0(1+i)^2.i$	$A_3=A_0(1+i)^2+A_0(1+i)^2.i=A_0(1+i)^2(1+i)=A_0(1+i)^3$
...	...	...	...
n			$A_n=A_0(1+i)^n$

القيمة المحصلة : $A_n = A_0 x(1+i)^n$

مثال : رأسمال 100000 موظف في البنك لمدة 3 سنوات , بمعدل فائدة 6 % سنويا.

أوجد الجملة أو القيمة المحصلة A_n في نهاية السنة الثالثة :

$$A_n = A_0 * (1+i)^n = 100000 * (1+0.06)^3 = 119101.6$$

ملاحظة :

مدة الرسملة أو عدد الفترات عادة تكون بالسنوات , ويمكن أن تكون بفترات أخري : سداسيات , ثلاثيات.......

ويجب أن تتلائم الفترات مع معدل الفائدة , أي:

_ إذا كان المعدل سنوي annuel , الفترات تحسب بالسنوات.

_ إذا كان المعدل سداسي semestriel , الفترات تحسب بالسداسيات .
_ إذا كان المعدل رباعي(4 أشهر) quadrimestriel , الفترات تحسب بالرباعيات .
_ إذا كان المعدل ثلاثي trimestriel , الفترات تحسب بالثلاثيات .
_ إذا كان المعدل ثنائي (شهرين) bimestriel , الفترات تحسب بالثنائيات .
_ إذا كان المعدل شهري mensuel , الفترات تحسب بالأشهر .

3-1. القيمة المحصلة في حالة المدة غير كاملة بالسنوات :

المدة غير كاملة بالسنوات , أي تتكون من عدد من السنوات وعدد من الأشهر أو الأيام , و المعدل سنوي :

الطريقة الرياضية :

بإستخدام الأس(القوة) , عدد غير صحيح: $A_n = A_0 * (1+i)^{(n+m)}$

المدة بالسنوات و عدد من الأشهر : $n + \frac{m}{12}$

المدة بالسنوات و عدد من الأيام : $n + \frac{m}{360}$

مثال:

رأسمال 72800 موظف في البنك لمدة 6 سنوات و 7 أشهر بمعدل فائدة 9.5% سنويا .

المدة : $n + m = 6 + \frac{7}{12} = 6.58333333$

القيمة المحصلة :

$$A_n = 72800 * (1.095)^{(6+\frac{7}{12})} = 72800 * (1.095)^6 * (1.095)^{\frac{7}{12}} = 132314.56$$

4-1. الفائدة: L'intérét

هي الفرق بين القيمة المحصلة و رأس المال الأصلي (الفرق بين رأس المال في نهاية المدة و رأس المال في بداية المدة):

$$I_n = A_n - A_0 = A_0 * (1+i)^n - A_0$$

$$I_n = A_n - A_0 = A_n - A_n(1+i)^{-n}$$

مثال :

رأسمال 72800 موظف في البنك لمدة 6سنوات , بمعدل 10% سنويا.

الفائدة بعد 6 سنوات: $I_6 = A_6 - A_0 = 72800 * (1.1)^6 - 72800 = 56169.64$

الفائدة بعد 2 سنتين: $I_2 = A_2 - A_0 = 72800 * (1.1)^2 - 72800 = 15288$

فائدة السنة الثانية فقط : الفرق بين رأس المال في نهاية السنة الثانية و رأس المال في بداية السنة الثانية:

$$I = A_2 - A_1 = 72800 * (1.1)^2 - 72800 * (1.1)^1 = 8008$$

2. حساب عناصر الفائدة المركبة:

1-2. حساب المدة:

تحسب رياضيا بإستخدام اللوغاريتم العشري Log10=1 :

$$A_n = A_0 * (1+i)^n$$
$$logA_n = logA_0 + n * log(1+i)$$

مثال:

رأسمال100000 موظف في البنك لمدة معينة n فأعطي جملة 179084.77 بمعدل فائدة 6% سنويا.

$$179084.77 = 100000 * (1.06)^n$$
$$log179084.77 = log100000 + n * log1.06$$

$$n = \frac{log179084.77 - log100000}{log1.06} = 10$$

10 سنوات.

2-2. حساب المعدل:

يحسب رياضيا باستخدام القوة أو الجذر النوني:

$$A_n = A_0 * (1+i)^n$$
$$(1+i)^n = \frac{A_n}{A_0}$$
$$1+i = \left(\frac{A_n}{A_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A_n/A_0}$$

مثال:

رأسمال 100000 موظف في البنك لمدة 10 سنوات ،فأعطي جملة 179084.77 بمعدل فائدة سنوي .

$$179084.77 = 100000 * (1+i)^{10}$$
$$(1+i)^{10} = 1.7908477$$
$$1+i = \sqrt[10]{1.7908477} = 1.06$$
$$i = 0.06$$

معدل الفائدة 6% سنويا.

3. معدلات الفائدة المتناسبة و المتكافئة:

1-3. المعدلات المتناسبة: taux proportionnels يكون معدلين متناسبين , إذا كانت نسبتهما تساوي نسبة فترتيهما.

المعدل السنوي : i_a $i_a = 12\ \%$

المعدل السداسي المتناسب : i_s $i_s = \frac{i_a}{2} = \frac{12}{2} = 6\ \%$

المعدل الثلاثي المتناسب : i_t $i_t = \frac{i_a}{4} = \frac{12}{4} = 3\ \%$

المعدل الشهري المتناسب : i_m $i_m = \frac{i_a}{12} = \frac{12}{12} = 1\ \%$

2-3 . المعدلات المتكافئة taux équivalents

يكون معدلين متكافئين , إذا كان لهما نفس الجملة.

المعدل السنوي : i_a $i_a = 12$

المعدل السداسي المكافئ i_s , يحقق : $(1+i_a)^1 = (1+i_s)^2 \gg (1.12)^1 = (1+i_s)^2$

$i_s = 5.831$

المعدل الثلاثي المكافئ i_t , يحقق : $(1+i_a)^1 = (1+i_t)^4 \gg 1.12 = (1+i_t)^4$

$i_t = 2.874$

المعدل الشهري المكافئ i_m , يحقق:

$(1+i_a)^1 = (1+i_m)^{12} \gg 1.12 = (1+i_m)^{12}$

$i_m = 0.95$

مثال:

رأسمال 100000 موظف في البنك لمدة 4 سنوات بمعدل فائدة 6% سداسيا.

جملة المبلغ:

$$A_n = A_0 * (1+i_s)^8 = 100000 * (1.06)^8 = 159384.8$$

معدل الفائدة السنوي الذي يعطي نفس الجملة, هو المعدل المكافئ :

$$(1+i_a)^1 = (1+i_s)^2 \gg (1+i_a)^1 = (1.06)^2 = 1.1236$$

$$i_a = 12.36$$

الجملة بمعدل سنوي مكافئ:

$$A_n = A_0 * (1+i_a)^4 = 100000 * (1.1236)^4 = 159384.8$$

الجملة بمعدل سنوي متناسب: $i_a = 2 * i_s = 2 * 6 = 12$

$$A_n = A_0 * (1+i_a)^4 = 100000 * (1.12)^4 = 157351.93$$