مثال: إذا كانت لدينا المعلومات التالية الجدول

Φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CT	150	200	225	255	295	350	420	510	625	770	950

① أحسب التكلفة الثابتة والمتغيرة

② أحسب متوسط التكلفة الثابتة والتكلفة المتغيرة ومتوسط التكلفة الكلية

③ أحسب الإيراد الحدي

④ أحسب حجم الإنتاج الأمثل الذي ~~يحقق~~ يحقق أكبر ربح؟

C_m	CTM	CVM	CFM	CVT	CFT	CT	Φ
-	-	-	-	0	150	150	0
50	200	50	150	50	150	200	1
25	112,5	37,5	75	75	150	225	2
30	85	35	50	105	150	255	3
40	73,7	36,2	37,5	145	150	295	4
55	70	40	30	200	150	350	5
70	70	45	25	270	150	420	6
90	72,8	51,4	21,4	360	150	510	7
115	78,0	59,3	18,7	475	150	625	8
145	86,4	68,8	16,6	620	150	770	9
180	95	80	15	800	150	950	10

حجم الإنتاج الأمثل هو $\Phi=6$ عندما يكون $C_m = CTM$

- نعلم أن التكلفة الكلية $CT = CF + CV$ ولكن عند $\Phi = 0$ يصبح $CV = 0$ أي $CT = CF$

$$CT = CF + CV \Rightarrow CV = CT - CF$$

- التكاليف المتغيرة تزداد بزيادة عدد الوحدات المنتجة أي كلما زاد الإنتاج زادت التكاليف

- متوسط التكاليف الثابتة هي دالة متناقصة

مثال آخر يوضح الجدول التالي بعض المعطيات عن تكاليف إحدى المؤسسات

φ	CT	CVT	CFT	CTM	CVM	CFM	Cm
0	0	0	40	0	-	-	-
1	5	35	40	5	35	40	5
2	60	20	40	30	10	20	.
3	79	39	40	26,33	13	13,33	19
4	105	65	40	26,25	16,25	10	26
5	150	110	40	30	22	8	45
6	200	160	40	33,33	26,66	6,66	50

المطلوب: أكمل الجدول؟

الحل

- يمكن حساب التكلفة الثابتة φ من $CFT = CFM.\varphi$

$CFT = CFM.\varphi = 10.4 = 40$

- يمكن حساب التكلفة المتغيرة عند $\varphi = 4$

$CT = CF + CV \Rightarrow 105 = CV + 40$

$CV = 105 - 40 = 65$

- يمكن حساب CTm و CVM من $\varphi = 4$

- يمكن حساب CT عند $\varphi = 5$

$CT = 5CVT + CFT$

- يمكن حساب CT عند $\varphi = 2$

$CT = CTm.\varphi = 30.2 = 60$

$CT = CVT + CFT \Rightarrow CVT = CT - CF$

- يمكن حساب CVT من $\varphi = 3$

$CVT = CVM.\varphi$

- يمكن حساب CT_6

$Cm = CT_6 - CT_5 \Rightarrow 50 = CT_6 - 150$

- CT_2 ∆ = =

$Cm = CT_2 - CT_{\dots} =$

$CTm = 30 - \varphi + \frac{3}{40}\varphi^2$

① إيجاد دالة التكلفة الكلية

$CTm = \frac{CT}{\varphi} \Rightarrow CT = CTm \cdot \varphi$

$CT = 30 - \varphi + \frac{3}{40}\varphi^2 \ (\varphi)$

$\boxed{CT = 30\varphi - \varphi^2 + \frac{3}{40}\varphi^3}$

✓ إيجاد التكلفة المتغيرة: إن دالة التكلفة الكلية لا يوجد فيها عدد ثابت الذي يمثل التكلفة الثابتة، بالتالي $(CF=0)$ التكلفة الثابتة معدومة، ومنه يمكن القول أن دالة التكلفة الكلية هي نفسها دالة التكلفة المتغيرة

$CV = CT = 30\varphi - \varphi^2 + \frac{3}{40}\varphi^3$

✓ دالة التكلفة الحدية

$\boxed{Cm = \frac{dCT}{d\varphi} = 30 - 2\varphi + \frac{9}{40}\varphi^2}$

② إيجاد متوسط التكلفة المتغيرة

$CVm = \frac{CV}{\varphi} = \frac{30\varphi - \varphi^2 + \frac{3}{40}\varphi^3}{\varphi}$

$\boxed{CVm = 30 - \varphi^2 + \frac{3}{40}\varphi^2}$

$CFm = \frac{CF}{\varphi} = \frac{0}{\varphi} = \boxed{0 = CFm}$

③ إيجاد نقطة تقاطع Cm مع CTm

معنى ذلك أن $Cm = CTm$

$30 - 2\varphi + \frac{9}{40}\varphi^2 = 30 - \varphi + \frac{3}{40}\varphi^2$

$30 - 2\varphi + \frac{9}{40}\varphi^2 - 30 + \varphi - \frac{3}{40}\varphi^2 = 0$

$-\varphi + \left(\frac{9}{40} - \frac{3}{40}\right)\varphi^2 = 0$

$-\varphi + \frac{6}{40}\varphi^2 = 0 \Rightarrow \varphi\left(-1 + \frac{6}{40}\varphi\right) = 0$

$\begin{cases} \varphi = 0 & \text{مرفوضة} \\ -1 + \frac{6}{40}\varphi = 0 \Rightarrow \frac{6}{40}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \end{cases}$

$\boxed{\varphi = \frac{20}{3}}$ عدد الوحدات التي يتساوى عندها Cm مع CTm

والتكلفة المقابلة لذلك هي

$CTm = 30 - \frac{20}{3} + \frac{3}{40}\left(\frac{20}{3}\right)^2$

$CTm = 30 - \frac{20}{3} + \frac{3}{40} \cdot \frac{400}{9}$ (10)

$CTm = 30 - \frac{20}{3} + \frac{10}{3}$

$\boxed{CTm = 26,67}$

$(\varphi, CT) = \left(\frac{20}{3}, 26,67\right)$

حل التمرين 4 :

$CT = \frac{1}{3}\varphi^3 - 6\varphi^2 + 40\varphi + 20$

① استخراج دوال الايراد :

الكلفة الثابتة CF هي العدد الثابت في دالة الكلفة الكلية

$CF = 20$

الكلفة المتغيرة CV هي الكلفة المتعلقة بالانتاج

$CV = \frac{1}{3}\varphi^3 - 6\varphi^2 + 40\varphi$

الكلفة الحدية Cm

$Cm = \frac{dCT}{d\varphi} = \varphi^2 - 12\varphi + 40 = Cm$

متوسط الكلفة الثابتة CFm

$CFm = \frac{CF}{\varphi} = \frac{20}{\varphi} = CFm$

متوسط الكلفة المتغيرة CVm

$CVm = \frac{CV}{\varphi} = \frac{\frac{1}{3}\varphi^3 - 6\varphi^2 + 40\varphi}{\varphi}$

$CVm = \frac{1}{3}\varphi^2 - 6\varphi + 40 = CVm$

متوسط الكلفة الكلية CTm

$CTm = \frac{CT}{\varphi} =$

$CTm = \frac{1}{3}\varphi^2 - 6\varphi + 40 + \frac{20}{\varphi}$

② استخراج دوال الايراد :

الايراد الكلي RT

$RT = P_\varphi \cdot \varphi = 29\varphi = RT$

ايراد المتوسط RTm

$RTm = \frac{RT}{\varphi} = \frac{29\varphi}{\varphi} = 29$

الايراد الحدي RTm

$RT_m = \frac{dRT}{d\varphi}$

$R_m = 29$

③ استخراج الكمية التي تعظم الربح لدينا شرطين

لايجاد الكمية التي تعظم الربح لدينا شرطين

الشرط الاول

$R_m = C_m$

$29 = \varphi^2 - 12\varphi + 40$

$\varphi^2 - 12\varphi + 40 - 29 = 0$

$\varphi^2 - 12\varphi + 11 = 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4(1)(11) = 100 \Rightarrow \sqrt{100} = 10$

$\varphi_1 = \frac{+12-10}{2(1)} = 1 = \varphi_1$

$\varphi_2 = \frac{12+10}{2(1)} = 11 = \varphi_2$

$CT' > 0$

$(\varphi^2 - 12\varphi + 40)' > 0$

$(2\varphi - 12) > 0$ { $\varphi_1 = 1 \Rightarrow 2(1) - 12 = -10 < 0$ مرفوضة

$\varphi_2 = 11 \Rightarrow 2(11) - 12 =$

$10 > 0$ مقبولة

إذن الكمية التي تعظم الربح هي

$\boxed{\varphi = 11}$

$\Pi = RT - CT$

$RT = 11(29) = 319$

$CT = \frac{1}{3}(11)^3 - 6(11)^2 + 40(11) + 20$

$CT = 177,66$

$\Pi = 319 - 177,66 = \boxed{141,31 = \Pi}$ ← الربح

ثمن بيع عتبة الغلق هي عبارة عن السعر المقابل لنقطة الدنيا لمتوسط التكاليف المتغيرة أي

$P_\varphi = \text{Min } cvm$

$cvm = \frac{1}{3}\varphi^2 - 6\varphi + 40$

عند النقطة الدنيا لمتوسط التكاليف المتغيرة تكون المشتقة الأولى مساوية للصفر

$cvm' = 0$

$cvm' = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\varphi - 6 = 0$

$\frac{2}{3}\varphi = 6 \Rightarrow \varphi = 6\frac{3}{2} = \boxed{9 = \varphi}$

إذن الكمية $\boxed{\varphi = 9}$ تمثل الكمية المقابلة للنقطة الدنيا لمتوسط التكاليف المتغيرة وبتعويض φ في cvm نجد

$cvm = \frac{1}{3}(9)^2 - 6(9) + 40 = \boxed{13}$

وعليه أدنى سعر يمكن أن يقبل به المنتج لبيع سلعته هو $\boxed{P_\varphi = 13}$ أي إذا

$P_\varphi \geq 13$ يستمر بإنتاج

$P_\varphi \leq 13$ يتوقف المنتج عن الإنتاج