Université Djilali BOUNAÂMA-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Niveau : $1^{ière}$ année LMD
Année : 2022-2023
Matière : Algèbre 2

Devoir de maison

Exercice 1 :
Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$
$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
$E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$
$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geqslant 0\}$

Exercice 2 :
Soit E un espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous- e.v de } E \Longleftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

Exercice 3 :
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent $x \mapsto ax + b$, pour certains réels a et b. Soit enfin $G = \{f \in E : f(0) = 0, f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que
$$E = F \oplus G.$$