المحاضرة رقم 8: اختبار ت لمجموعتين مرتبطتين

اختيار "ت" للمجموعة الواحدة:

يستخدم اختبار "ت" للعينة الواحدة للحكم على مدى معنوية الفروق بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع، أو بين متوسط عينة وقيمة ثابتة محددة سلفا، ويحسب بالمعادلة الآتية:

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

حيث: $\bar{x}$ المتوسط الحسابي، a: قيمة ثابتة.، σ: الانحراف المعياري.

n: حجم العينة. ، μ: الوسط الحسابي للمجتمع.

شروط تطبيق اختيار "ت":

- حجم العينة أقل من 30.
- البيانات تتبع التوزيع الطبيعي.

مثال:

كان مستوى القلق لدى عينة متكونة من 15 فردا من غير الرياضيين كما يلي: 61، 65، 51، 48، 71، 62، 67، 63، 46، 45، 66، 69، 62، 56، 52.

المطلوب:

هل هناك فروقا معنوية بين مستوى القلق لدى غير الرياضيين مستوى القلق الطبيعي والمقدر بـ 50 درجة، أو بتعبير آخر: هل يختلف مستوى القلق لدى غير الرياضيين عن مستوى القلق الطبيعي المقدر بـ 50 درجة؟ علما بان البيانات تتبع التوزيع الطبعي.

الحل:

– تحديد المشكل:

هل يختلف مستوى القلق لغير الممارسين للرياضة عن مستوى القلق الطبيعي؟

– الفرضية الاحصائية:

ف$_0$: لا يختلف مستوى القلق لغير الرياضيين عن مستوى القلق الطبيعي. $H_0 = \bar{x} = 50$

ف$_1$: مستوى القلق لغير الرياضيين أكبر من المستوى الطبيعي. فرضية موجهة.

$$H_1 = \bar{x} > 50$$

1- **الاختبار الإحصائي المناسب:**

البيانات كمية، الهدف من البحث تحديد دلالة الفروق، لدينا مجموعة بيانات واحدة، إذن اختبار "ت" للمجموعة الواجدة هو الاختبار المناسب.

4-**القيمة الحرجة:** α =0,05. df=n-1=15-1=14

$$t_t = 1,76$$

5– الإجراء الحسابي:

$$Sd = 8,61 ، n = 15 ، a = 50 ، \bar{x} = 58,93$$

$$t_{cal} = \frac{\bar{x} - a}{sd / \sqrt{n}} = \frac{58,93 - 50}{8,61/\sqrt{15}} = 4,016$$

***6*– القرار الإحصائي،**

بما أن القيمة لمسحوبة أكبر من القيمة الجدولية. $t_{col} > t_t$

إذن نقبل ف1 ونرفض ف0، *وبالتالي فإن مستوى القلق لغير الرياضيين أكبر من المستوى الطبيعي.*

مثال 2:

لنفرض أن مصنعا للأدوية ينتج فيتامين C، ويرغب في اختيار الفرضية التي تقرر بأن الأفراد الذين يتناولون فيتامين C مختلفون في درجة ذكائهم عن فئة الأفراد العاديين، وعلي قام المصنع بحساب درجة الذكاء لعينة تتكون من 25 فردا ممن يتناولون هذا الفيتامين، كما متوسط ذكاء درجات الذكاء للأفراد يساوي 108.

المطلوب:

حساب دلالة ما إذا كان متوسط ذكاء أفراد العينة يزيد عن متوسط ذكاء أفراد المجتمع والذي يساوي 100 بانحراف معياري δ =15

الحل:

– تحديد المشكل:

هل يوجد فرق بين متوسط ذكاء أفراد العينة ومتوسط ذكاء أفراد المجتمع؟

– صياغة الفرضيات: -لا يوجد فرق $H_0=\bar{x} = 100$

-يوجد فرق $H_1=\bar{x} > 100$

- الاختبار الإحصائي المناسب:

بما أن البيانات كمية والهدف من البحث تحديد دلالة الفروق، والانحراف المعياري للمجتمع معلوم، إذن اختيار Z للمجموعة الواحدة هو الاختبار المناسب.

– القمة الحرجة: $Z_t = 2{,}33$ للطرف الواحد.

في مستوى α =0,01

– **الإجراء الحسابي:** $Z_{col} = \frac{\bar{x}-\mu}{\delta / \sqrt{n}} = \frac{108-100}{15/\sqrt{25}} = 2,66$

– **القرار الإحصائي:** $2,66 \geq 2,33$ $Z_{col} \geq Z_t$

إذن نقبل H_1 ونرفض H_0، بمعنى أن متوسط ذكاء أفراد العينة أكبر من متوسط ذكاء أفراد المجتمع.

اختبار ت لمجموعتين مرتبطتين:

يستخدم اختبار ت "عندما تكون البيانات في مستوى القياس الكمي أو النسبي ومصدر البيانات نفسه، كإجراء قياس قبلي على مجموعة في متغير معين ومقارنة قيمه مع قيم القياس البعدي، وبحسب القانون الآتي:

$$t_{col} = \frac{\Sigma d}{\sqrt{\frac{n\Sigma d^2 - (\Sigma d)^2}{n-1}}}$$

مثال:

قام باحث باقتراح برنامج للتخفيض من الضغط لذوي الاحتياجات الخاصة حركيا، وبعد التطبيق كانت النتائج كما يلي:

الأفراد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
القياس القبلي	58	45	61	55	58	90	26	35	42	48
القياس البعدي	46	50	23	50	45	85	30	20	50	60

المطلوب :

إذا علمت ان البيانات تميل إلى الاعتدالية في القياسين، تحقق من دلالة الفروق بين درجات القياس القبلي و البعدي في مستوى الضغط؟

الحل:

- **تحديد المشكل:**

هل يوجد فروق بين درجات القياس القبلي و البعدي في مستوى الضغط؟

– صياغة الفرضيات:

ف$_0$: لا يوجد فروق. ف$_1$: يوجد فروق.

– الاختبار الإحصائي المناسب:

بما أن البيانات كمية ومعتدلة للقياسين، الهدف من البحث تحديد الفروق، لدينا مجموعتين مرتبطتين (مصدر البيانات واحد) إذن اختيار "ت" لمجموعتين مرتبطين هو الاختبار المناسب.

– القيمة الحرجة: $\alpha = 0{,}05.\ \mathrm{df} =$

$$n - 1$$

$$\mathrm{df} = 10 - 1 = 9$$

$$t_t = 2{,}262$$

– الإجراء الحسابي:

N	P.T	P.T	d	d_2
1	58	46	12	144
2	45	50		
3	61	23		
4	55	50		
5	58	45		
6	90	85		
7	26	30		
8	35	20		
9	42	50		
19	48	60		
			59	2281

$$t_{col} = \frac{59}{\sqrt{\frac{(19 \times 2281) - 59^2}{10 - 1}}} = 1{,}273$$

– القرار الإحصائي:

بما أن القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية $t_{col} < t_t$

$1,273 < 2,262$، إذن نرفض الفرضية البديلة ونقبل الفرضية الصفرية، ونقول بأن الفروق بين القياسين في درجات الضغط غير معنوية.

اختبار ت للمجموعتين المستقلتين

يستخدم في حال الفرق بين متوسطي عينتين مستقلّتين عن طريق حساب القيمة المحسوبة ومقارنتها بجدول توزيع ت ونفترض اختبار ت ما يلي:

- اعتدالية توزيع درجات المتغيّر التابع لكل من العينتين
- التجانس

ف= $\frac{\text{التباين الأكبر}}{\text{التباين الأصغر}}$ $f_{cal} = \frac{v2}{v1}$

مقارنة النسبة الفائية مع قيمة ف من جدول توزيع" ف" بدرجات حرية (n_1 -1) للبسط، (n_2 -1) للمقام عند مستوى α =0,05، فإذا كانت السنة الفائية المحسوبة أقل من القيمة الجدولية فإن القرار يكون بقبول فرضية تجانس المجموعتين.

أما إذا كانت السنة الفائية المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية فإن القرار يكون برفض فرضية تجانس المجموعتين وقبول البديل(عدم التجانس)، ومن هذا فإننا أمام حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان العيّنتان متجانستان.

$n_1 \neq n_2$

$$T = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\delta_1^2 + (n_2-1)\delta_2^2}{(n_1+n_2)-2} \times \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}}$$

$$df = (n_1 + n_2) - 2$$

$$T = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{n}}} \qquad n_1 = n_2$$

$$df = (2n) - 2$$

الحالة الثانية: العينتان غير متجانستان:

$n_1 = n_2$

$$T = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{n}}} \qquad df = (2n) - 2$$

حالة $n_1 \neq n_2$

$$T = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}}$$

$$df = \left[\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}\right]^2 \div \left[\frac{\delta_1^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{\delta_1^4}{n_2^2(n_2 - 1)}\right]$$

مثال1 :

طبق اختبار لقياس المهارة الكلية في كرة السلة على قسمين دراسيتين، مستوى أولى ثانوي وكانت بيانات الاختبار كما يلي:

القسم 1	10	5	6	3	9	8	7	5	6	5
القسم 2	7	2	1	4	4	5	2	5	3	4

فإذا افترضنا أنه لا توجد فروق بين متوسطي القسمين في المهارة الكلية لكرة السلة، فإلى أي مدى يمكن قبول أو رفض هذه الفرضية عند مستوى α=0,01.

الحل: خطوات اختبار الفرضية:

- المشكل:

هل توجد فروق في المهارة الكلية لكرة السلة بين القسمين؟

- الفرضيات:

ف$_0$= لا يوجد فروق بين القسمين في المهارة الكلية لكرة السلة

ف$_1$: يوجد فروق بين القسمين في المهارة الكلية لكرة السلة.

الاختبار المناسب:

التحقق من الاعتدالية: يجب حساب معاملي الالتواء والتفرطح.

$$sk_1 = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\sum(x-\bar{x})^3}{n\sigma^3} = \frac{20.88}{10\times 2.11^3} = 0.22 \qquad sk_2 = 0.19$$

$$ca_1 = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{\sum(x-\bar{x})^4}{n\sigma^4} = \frac{365.5}{10\times 2.11^4} = -1.15 \qquad ca_2 = -0.97$$

بما أن معاملي الالتواء والتفرطح أقل من 2 × الخطأ المعياري $es_{sk} = \sqrt{\frac{6}{n}} = \sqrt{\frac{6}{10}} = 0.77$

$es_{ca} = 2 \times \sqrt{\frac{6}{n}} = 1.54$

لهاذين المعاملين فإن البيانات تميل إلى الاعتدالية في المجموعتين.

-التحقق من التجانس: $f_c = \frac{v2}{v1} = \frac{4.45}{3.09} =$ 1,44

القيمة الجدولية: $f_t = \frac{n-1}{n-1} = \frac{9}{9} =$ 3,18

القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية: $fc < f_t$، ومنه المجموعتين متجانستين.

– البيانات نسبية، والهدف من البحث هو تحديد دلالة الفروق، البيانات معتدلة، المجموعتين مستقلتين (مصدر البيانات مختلف)، متجانستين ومتساويتين في العدد، إذن اختبار " ت" لمجموعتين مستقلتين متجانستين متساويتين في العدد هو الاختبار المناسب.

– القيمة الحرجة: $df = (2n) - 2$

$$df = 18 \quad f_t = 2{,}88$$

– الإجراء الحسابي:

$$t_{cal} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{n}}} = \frac{6.4 - 3.47}{\sqrt{\frac{2.11^2 + 1.76^2}{10}}} = 3.09$$

– **القرار الإحصائي:** القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية.

$t_{cal} \geq t_t$ $3{,}09 \geq 2{,}88$، إذن الفروق بين القسمين لها دلالة إحصائية.

مثال2:

أجريت دراسة لمعرفة الفروق بين الذكور والإناث في سمة العدوانية، واختيرت عيّنتين عشوائيتين وكانت درجاتهم كالآتي:

ذكور	5	4	7	6	4	8	2	8	5	9	2	5	4	7	8	
إناث	4	5	3	3	6	3	4	5	7	4	7	3	5	6	4	5

المطلوب:

اختبار الفرضية التي تنص على عدم وجود اختلاف بين الذكور والإناث في العدوانية.

الحل:

المشكل: هل يوجد فرق في سمة العدوانية بين الذكور والإناث؟

الفرضيات:

ف$_0$= لا توجد فروق

ف$_1$= يوجد فروق(فرضية غير موجهة).

الاختبار المناسب:

التحقق من الاعتدالية: يجب حساب معاملي الالتواء والتفرطح .

sk_1 =-0.12	sk_2 =0.57
ca_1 =−0.41	ca_2 =-0.05
$es_{sk1=}$ =0.63	$es_{sk2=}$ =0.61
$es_{ca1=}$ 1.26	$es_{ca2=}$ 1.22

بما أن معاملي الالتواء و التفرطح أقل من 2 × الخطأ المعياري لهاذين المعاملين فإن البيانات تميل إلى الاعتدالية في المجموعتين.

- **التحقق من التجانس:**

$$f_{cal}=\frac{v2}{v1}=\frac{4.78}{1.84}=2.6$$

نستخرج قيمة" ف" من الجداول بدرجات حرية (15,14) ومستوى الدلالة 0.05

$$f_t\,(14,15\ ،0,05\ )=2,48$$

$f_c>f_t$ 2.60> 2.48 ومنه المجموعتين غير متجانستين

- البيانات معتدلة، كمية، والهدف من البحث هو التحقق من الفروق.

– المجموعتين مستقلتين غير متجانستين، غير متساويتين في العدد ومنه اختبار " ت" لمجموعتين مستقلتين غير متجانستين وغير متساويتين في العدد هو الاختبار الإحصائي المناسب.

– القيمة الحرجة:

$$df = \left[\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}\right]^2 \div \left[\frac{\delta_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{\delta_1^4}{n_2^2(n_2-1)}\right] = \left[\frac{4.79}{15} + \frac{1.84}{16}\right]^2 \div \left[\frac{\delta_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{\delta_1^4}{n_2^2(n_2-1)}\right] = 23.08$$

$t_{t=}2.06$

– الإجراء الحسابي:

$$T = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}} = \frac{5.6 - 4.62}{\sqrt{\frac{4.79}{15} + \frac{1.84}{16}}} = 1.47$$

– القرار الإحصائي:

بما أن القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية $t_{cal} < t_t$، إذن نرفض الفرضية البديلة ونقبل الفرضية الصفرية، وبالتالي الفروق ترجع إلى عوامل الصدفة أي غير دالة إحصائيا.

مثال 3.

طبق اختبارين على مجموعتين مستقلتين من الطلاب أحدهما من الممارسين وأخرى من غير الممارسين، فإذا إذا علمت أن البيانات من المجموعتين معتدلة، اختبر الفرضية الصفرية في مستوى الدلالة α =0,01

الممارسون			غير الممارسين		
$\overline{x_1}$	δ_1^2	n_1	$\overline{x_2}$	δ_2^2	n_2
80	18	17	75	18	15

الحل:

- **تحديد المشكل:** هل يوجد فرق بين الدرجات بين متوسطي المجموعتين؟

- **الفرضيات:**

ف$_0$: لا توجد فروق

ف:$_1$يوجد فروق

- **الاختبار الإحصائي المناسب:**

- البيانات في المجموعتين معتدلة.

- **التجانس:** $f_{cal}=\frac{\text{التباين الأكبر}}{\text{التباين الأصغر}}\ \frac{\mathbf{V2}}{\mathbf{V1}}$

$$f_t = \frac{18}{16} = 1{,}12$$

$$f_{cal} = \frac{\mathrm{df}=n-1}{\mathrm{df}=n-1} = 2{,}42 \qquad \alpha = 0{,}05$$

- المجموعتين متجانستين بما أن $f_t > cal$

- البيانات في مستوى القياس النسبي، الهدف من البحث هو تحديد الفروق، البيانات معتدلة، المجموعتين غير متجانستين وغير متساويتين في العدد، إذن اختبار " ت" لمجموعتين مستقلتين متجانستين غير متساويتين في العدد.

هو الاختبار الإحصائي المناسب.

- **القيمة الحرجة:**

$$df = (n_1 + n_2) - 2 = 30$$

$$t_{\mathrm{t}} = 2.75 \qquad \alpha = 0.01$$

- الإجراء الحسابي:

$$T = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\delta_1^2+(n_2-1)\delta_2^2}{(n_1+n_2)-2} \times \left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}} = T = \frac{80-75}{\sqrt{\frac{(17-1)16+(15-1)18}{(17+15)-2} \times \left[\frac{1}{17}+15\right]}} = 3.41$$

- القرار الإحصائي:

بما أن $t_{cal} \geq t_t$ ومنه نقبل H_1 ونرفض H_0 ونقول أن الفروق دالة إحصائية.

اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتين مستقلّتين:

إذا أخذت عيّنة n_1 من مجتمع، وأخذت عينة عشوائية ثانية وحجمها n_2 من مجتمع ثاني، فإن إحصاء الاختبار للفرضية $h_0: \ p_1 = p_2$ هو:

$$z_{cal} = \frac{\widehat{p1} - \widehat{p2}}{\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n_1}+\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n_1}}} \qquad \hat{p} = \frac{x}{n} \qquad \bar{p} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$$

مثال:

للمقارنة بين نسبة الرياضيين المدخنين في الفئة العمرية (25- 18) سنة مع الفئة العمرية(26 فأكثر) أخذت عينة عشوائية حجمها 200 من الفئة الأولى فوجد 80 منهم يدخنون، وأخذت عيّنة عشوائية مستقلة عن الأولى من الفئة العمرية الثانية وحجمها 100 وجد بينهم 52 مدخنون.

اختبر الفرضية القائلة $h_1: \ p_1 < p_2$ مقابل $h_0: \ p_1 = p_2$ في مستوى دلالة 0,05= α

الحل:

$$h_0: \ \widehat{p1} = \widehat{p2}$$

$$h_1 : \ \widehat{p1} < \widehat{p2}$$

– **القيمة الجدولية:** $\alpha = 0,05$ ، $z_{t=-1.64}$

– **الاجراء الحسابي:**

أولا نحسب: $\bar{p} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2} \frac{80+52}{200+1000} = 0.44$

$$\hat{p}1 = \frac{80}{200} = 0.4 \qquad \hat{p}2 = 0.52$$

$$.z_{cal} = \frac{0.4 - 0.52}{\sqrt{\frac{0.44\times0.56}{200} + \frac{0.44\times0.56}{100}}} = -1.96$$

القرار الاحصائي:

بما أن قيمة Z *المحسوبة تقع في منطقة الرفض، إذا نقبل* h_1 *ونرفض* h_0، *أي* نسبة المدخنين في الفئة العمرية الأولى أصغر من نسبة المدخنين في الفئة الثانية.

قائمة المراجع:

- بوحفص عبد الكريم،(2013)، **الاساليب الاحصائية وتطبيقاتها يدويا وباستخدام برنامج spss**، الجزء 1، د.م.ج بن عكنون، الجزائر.

- ثروت محمد عبد المنعم، (2007)، **مدخل حديث للإحصاء والاحتمالات**، ط.2، الرياض، مكتبة العبيكان للنشر.

- جودة محفوظ، (2008)، **التحليل الاحصائي الأساسي باستخدام spss**، عمان، دار وائل للنشر والتوزيع.

- مراد، صلاح أحمد. (2000): **الأساليب الاحصائية في العلوم النفسية والتربوية والاجتماعية**، القاهرة، مكتبة الأنجلومصرية.

- سامي مسعود، أحمد شكري الريماوي،(1997) ، **مقدمة في علم الاحصاء الوصفي والتحليلي**، عمان، دار حنين للنشر والتوزيع.

– علام، صلاح الدين محمود (2005): **الأساليب الاحصائية الاستدلالية في تحليل بيانات البحوث النفسية والتربوية والاجتماعية**، القاهرة، دار الفكر العربي.

-champely stéphan,(2004),**statistique appliquée au sport,** bruxelles,éd. De boech université

- Hamdani hocine**,(**2010**), Statistique descriptive**,6 ed, alger ;opu.

-lezzar mesbah djenat,(2010) , **statistique : cours et exeercices corriges**, volume$_1$,faculté des sciences ,departement de mathématique,université mentouri de constantine