

Série 2: Applications linéaires

Exercice 1.

Soit l'application $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 2.

Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par:

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 3.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$u(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3; \quad u(e_2) = e_2 - 3e_3; \quad u(e_3) = -2e_2 + 2e_3$$

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur.
Déterminer l'image par u du vecteur x . (Calculer $u(x)$).
2. Soient $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = 2x\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$
Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer une base de E et une base de F .
4. Y a-t-il $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Exercice 4.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3), \\ f(e_2) &= \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \text{ et} \\ f(e_3) &= \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3) \end{aligned}$$

Soient $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$.

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1 .
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1} \cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2 = f \circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 5.

Soit $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^2 tel que $u(e_1) = e_1 + e_2$ et tel que $\dim(\ker(u)) = 1$

1. Déterminer $u(e_2)$ en fonction d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ en fonction de a .
3. Déterminer une base du noyau de $\ker(u)$.

Exercice 6 .

Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f . En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Exercice 7.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire

Montrer que:

$$\ker(f) \cap \text{im}(f) = f(\ker(f^2)).$$

Exercice 8.

Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel.

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
2. Montrer que $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$.

Exercice 9.

Soit u un endomorphisme de E , un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}$.
- (ii) $\ker(u) = \ker(u \circ u)$.

Solutions

Exercice 1.

1. Soient $u = (x, y, z, t)$ et $u' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^4 . Soient λ et λ' deux réels.

$$\lambda u + \lambda' u' = \lambda(x, y, z, t) + \lambda'(x', y', z', t') = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t')$$

donc

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') &= f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t') \\ &= (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y'), (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') \\ &\quad + (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t') \\ &= (\lambda(x + y) + \lambda'(x' + y'), \lambda(z + t) + \lambda'(z' + t'), \lambda(x + y + z + t) \\ &\quad + \lambda'(x' + y' + z' + t')) \\ &= \lambda(x + y, z + t, x + y + z + t) + \lambda'(x' + y', z' + t', x' + y' + z' + t') \\ &= \lambda f(u) + \lambda' f(u') \end{aligned}$$

f est linéaire.

On a:

$$\begin{aligned} u \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow (x + y, z + t, x + y + z + t) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ t = -z \end{cases} \Leftrightarrow u = (x, -x, z, -z) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, -1). \end{aligned}$$

On pose $a = (1, -1, 0, 0)$ et $b = (0, 0, 1, -1)$, a et b engendrent $\ker(f)$, d'autre part ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, finalement (a, b) est une base de $\ker(f)$.

3. Première méthode

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \\ f(e_1) &= (1, 0, 1); f(e_2) = (1, 0, 1); f(e_3) = (0, 1, 1); f(e_4) = (0, 1, 1). \end{aligned}$$

Comme $f(e_1) = f(e_2)$ et $f(e_3) = f(e_4)$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_3))$$

$f(e_1)$ et $f(e_3)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est génératrice de $\text{Im}(f)$, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

Deuxième méthode

D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) &= \dim(\mathbb{R}^4) \\ \Leftrightarrow 2 + \dim(\operatorname{Im}(f)) &= 4 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2. \end{aligned}$$

Ensuite on cherche deux vecteurs non proportionnels de $\operatorname{Im}(f)$, par exemple $f(e_1)$ et $f(e_3)$, ils forment une famille libre dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Exercice 2.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Soient λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\ u(\lambda x + \mu y) &= (-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3), -(\lambda x_1 + \mu y_1) \\ &\quad + \lambda x_3 + \mu y_3, -2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3)) \\ &= (\lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + 4y_3], \lambda[-x_1 + x_3] \\ &\quad + \mu[-y_1 + y_3], \lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + 4y_3]) \\ &= \lambda(-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3) \\ &\quad + \mu(-2y_1 + 4y_2 + 4y_3, -y_1 + y_3, -2y_1 + 4y_2 + 4y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y). \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$\begin{aligned} x \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \\ x &= \begin{pmatrix} x_3 \\ -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{2}(2, -1, 2). \end{aligned}$$

$a = (2, -1, 2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$ est un vecteur non nul qui engendre $\ker(u)$, c'est une base de $\ker(u)$.

$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$$

D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) &= \dim(\mathbb{R}^3) \\ \Leftrightarrow 1 + \dim(\operatorname{Im}(u)) &= 3 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(u)) = 2 \end{aligned}$$

$u(e_1) = -2e_1 - e_2 - 2e_3 = (-2, -1, -2)$ et $u(e_2) = 4e_1 + 4e_3 = (4, 0, 4)$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $\operatorname{Im}(u)$ qui est de dimension 2, $(u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

3. $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (a, u(e_1), u(e_2))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Il est presque évident que

$$u(e_1) + u(e_3) = a.$$

Sinon on calcule $\alpha a + \beta u(e_1) + \gamma u(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et on s'aperçoit que $\alpha = 1, \beta = -1$ et $\gamma = -1$ est une solution non nulle.

$(a, u(e_1), u(e_2))$ n'est pas une base, donc on n'a pas $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$

Exercice 3.

1.

$$\begin{aligned} u(x) &= ux_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3) \\ &= x_1(2e_1 + e_2 + 3e_3) + x_2(e_2 - 3e_3) + x_3(-2e_2 + 2e_3) \\ &= 2x_1e_1 + (x_1 + x_2 - 2x_3)e_2 + (3x_1 - 3x_2 + 2x_3)e_3 \\ &= (2x_1, x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$

2. $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = 2 \times 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E$

Soient x et y deux vecteurs de E , alors $u(x) = 2x$ et $u(y) = 2y$

Soient λ et μ deux réels

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda(2x) + \mu(2y) = 2(\lambda x + \mu y).$$

Donc $\lambda x + \mu y \in E$ et E est un sous-espace-vectoriel de \mathbb{R}^3

$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in F$

Soient x et y deux vecteurs de F , alors $u(x) = -x$ et $u(y) = -y$

Soient λ et μ deux réels

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda(-x) + \mu(-y) = -(\lambda x + \mu y).$$

Donc $\lambda x + \mu y \in F$ et F est un sous-espace-vectoriel de \mathbb{R}^3 .

3.

$$\begin{aligned} x \in E &\Leftrightarrow u(x) = 2x \Leftrightarrow (2x_1, x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) = 2(x_1, x_2, x_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $x = (x_1, x_1, x_3) = x_1(1, 1, 0) = x_1(e_1 + e_2)$.

$e_1 + e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de E .

$$\begin{aligned} x \in F &\Leftrightarrow u(x) = -x \Leftrightarrow (2x_1, 3x_1 - x_2, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) = -(x_1, x_2, x_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -x_1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $x = (0, x_3, x_3) = x_3(0, 1, 1) = x_3(e_2 + e_3)$.

$e_2 + e_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de F .

4.

$$\dim(E) + \dim(F) = 1 + 1 = 2.$$

Donc il n'y a pas somme directe.

Exercice 4.

1. Soient u, u' deux vecteurs de E_{-1} , alors $f(u) = -u$ et $f(u') = -u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda(-u) + \lambda'(-u') = -(\lambda u + \lambda' u').$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_{-1} ,

La troisième montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_{-1}$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}.$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, la seconde égalité montre que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$.

E_{-1} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Soient u, u' deux vecteurs de E_1 , alors $f(u) = u$ et $f(u') = u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda u + \lambda' u'.$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_1 ,

La seconde montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_1$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, cela montre aussi que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$.

E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

2.

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_2) &= f(e_1) - f(e_2) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) \\ &= -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2). \end{aligned}$$

Donc $e_1 - e_2 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_3) &= f(e_1) - f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) \\ &= -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3). \end{aligned}$$

Donc $e_1 - e_3 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 \\ &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Donc $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$.

3. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille de E_{-1} , donc la dimension de E_{-1} est supérieur ou égal à 2.

E_1 a un vecteur non nul, donc sa dimension est supérieur ou égal à 1.

4. Soit $u \in E_{-1} \cap E_1$, $f(u) = -u$ et $f(u) = u$ donc $-u = u$, ce qui signifie que le seul vecteur de $E_{-1} \cap E_1$ est le vecteur nul.

$$E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

5.

$$\begin{aligned} \dim(E_{-1} + E_1) &= \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) - \dim(E_{-1} \cap E_1) \\ &= \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) \geq 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Comme

$$E_{-1} + E_1 \subset \mathbb{R}^3.$$

On a

$$\dim(E_{-1} + E_1) \leq 3.$$

Finalement

$$\dim(E_{-1} + E_1) = 3.$$

Remarque : cela entraîne que $\dim(E_{-1}) = 2$ et $\dim(E_1) = 1$

L'intersection de ces sous-espaces vectoriels étant réduit au vecteur nul on a

$$E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3.$$

6. On peut calculer $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$ pour s'apercevoir que ces vecteurs valent respectivement e_1 , e_2 et e_3 . Mais c'est long.

Autre méthode

D'après la question précédente $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

(Une base de E_{-1} collée à une base de E_1 donne une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$). Tous les vecteurs de \mathbb{R}^3 s'écrivent de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, il suffit de montrer que $f^2(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$, $f^2(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ et que $f^2(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

Là, j'ai fait long, en fait il suffit de montrer les égalités ci-dessous

$$\begin{aligned} f^2(e_1 - e_2) &= f(f(e_1 - e_2)) = f(-(e_1 - e_2)) \\ &= -f(e_1 - e_2) = -(-(e_1 - e_2)) = e_1 - e_2 \end{aligned}$$

Car $e_1 - e_2 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f^2(e_1 - e_3) &= f(f(e_1 - e_3)) = f(-(e_1 - e_3)) \\ &= -f(e_1 - e_3) = -(-(e_1 - e_3)) = e_1 - e_3 \end{aligned}$$

Car $e_1 - e_3 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f^2(e_1 + e_2 + e_3) &= f(f(e_1 + e_2 + e_3)) \\ &= f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Car $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$.

Par conséquent $f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$.

Cela montre que $f^{-1} = f$ et que f est bijective.

Exercice 5.

1. D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) &= \dim(\mathbb{R}^2) \\ \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont proportionnels et alors

$$u(e_2) = au(e_1) = ae_1 + ae_2.$$

2.

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) \\ &= x_1(e_1 + e_2) + a(x_1e_1 + x_2e_2) = (x_1 + ax_2)e_1 + (x_2 + ax_2)e_2 \\ &= (x_1 + ax_2, x_2 + ax_2). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u(e_2) &= au(e_1) \Leftrightarrow u(e_2) - au(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \Leftrightarrow u(e_2 - ae_1) &= 0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

$e_2 - ae_1$ est un vecteur non nul de $\ker(u)$ et $\ker(u)$ est une droite, donc il s'agit d'une base de $\ker(u)$.

Exercice 6.

1.

$$f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = 1$$

Donc

$$\text{Im}(f) = \{1\} \text{ et } \dim(\text{im}(f)) = 1.$$

2. D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) &= \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 3, \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) &\Leftrightarrow x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

On pose $a = (-1, 1, 0, 0)$, $b = (-1, 0, 1, 0)$ et $c = (-1, 0, 0, 1)$.

(a, b, c) est une famille génératrice de $\ker(f)$ avec trois vecteurs et $\dim(\ker(f)) = 3$ donc (a, b, c) est une base de $\ker(f)$.

Exercice 7.

Soit $y \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et $f(y) = 0_E$

Donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0_E$ donc $x \in \ker(f^2)$, comme $y = f(x)$, $y \in f(\ker(f^2))$ On a montré que

$$\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset f(\ker(f^2))$$

Soit $y \in f(\ker(f^2))$, il existe $x \in \ker(f^2)$ tel que $y = f(x)$, ce qui montre que $y \in \operatorname{Im}(f)$ et comme

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E$$

on a $y \in \ker(f)$

On a montré que

$$f(\ker(f^2)) \subset \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$$

Et donc

$$\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f(\ker(f^2)).$$

Exercice 8.

1. Soit $x \in \ker(u)$, $u(x) = 0_E$, donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(u^2)$, ce qui montre que

$$\ker(u) \subset \ker(u^2).$$

2. Soit $y \in \operatorname{Im}(u^2)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x) = u(u(x))$, autrement dit il existe $x' = u(x)$ tel que $y = u(x')$, ce qui montre que $y \in \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 9.

Supposons que $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0_E\}$ et montrons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0_E$ alors $u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ alors $x \in \ker(u \circ u)$

Cela montre que $\ker(u) \subset \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u \circ u)$ alors $u(u(x)) = 0_E$, on pose $y = u(x) \in \operatorname{Im}(u)$ et comme $u(y) = 0_E$, $y \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)$, d'après (i) $y = 0_E$ et donc $u(x) = 0_E$ ce qui signifie que $x \in \ker(u)$

Cela montre que $\ker(u \circ u) \subset \ker(u)$ et finalement $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Supposons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$ et montrons que $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0_E\}$

Soit $y \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0_E$, cela entraîne que $u(u(x)) = 0_E$, autrement dit $x \in \ker(u \circ u)$, d'après (ii) $x \in \ker(u)$ donc $y = u(x) = 0_E$, cela montre bien que

$$\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}.$$