Chapitre 2

Espaces vectoriels

Pour bien aborder ce chapitre

La géométrie prédominait dans les mathématiques grecques et il fallut attendre Descartes au 17^{e} siècle pour faire le lien, grâce à la notion de repère, entre les notions géométriques :
– de points du plan ou de l'espace,
– de courbes
et celles algébriques
– de couples ou de triplets de réels,
– d'équations.
Cette approche s'avéra féconde à la fois pour les géomètres et les analystes. Elle offrit aux premiers toute la puissance de l'analyse pour traiter des problèmes de géométrie et, au second, les représentations de la géométrie pour visualiser et énoncer les phénomènes de l'analyse.
La généralisation des notions géométriques du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$ à des espaces de dimension plus grande n'a pas été immédiate. Il manquait le formalisme pour pouvoir aborder ce problème. C'est le mathématicien allemand autodidacte Hermann Grassmann qui, au 19^{e} siècle, esquissa les notions d'espace vectoriel et de dimension. Son travail était d'un abord difficile et c'est grâce au mathématicien italien Giuseppe Peano que ces concepts se précisèrent et prirent leur forme définitive.
Les mathématiciens disposèrent alors d'outils permettant d'aborder des problèmes de géométrie en dimension quelconque. Cependant c'est l'analyse qui donnera aux espaces vectoriels toute leur importance.
À la fin du 19^{e} siècle et au début du 20^{e} siècle, les mathématiciens allemands étudient des espaces de fonctions et créent l' analyse fonctionnelle. Les espaces étudiés ont des structures d'espace vectoriel. Le mathématicien polonais Stefan Banach écrira, dans sa thèse, que plutôt que d'étudier des problèmes particuliers et de démontrer isolément leurs propriétés, une meilleure stratégie est de prouver ces propriétés pour des ensembles généraux pour lesquels on a postulé des propriétés, puis de montrer que ces axiomes sont vérifiés par les problèmes particuliers.
Cette approche fonde en quelque sorte les mathématiques modernes. On introduit et étudie dans un premier temps des structures (groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ...) puis on vérifie à quelle catégorie se rattache un exemple particulier donné. Il hérite alors de toutes les propriétés de la catégorie à laquelle il appartient.
Les premiers pas en algèbre linéaire sont en général difficiles et rebutants. La difficulté ne tient pas tellement, contrairement à ce qu'on pourrait penser, à la difficulté des raisonnements mathématiques ou à l'abstraction des notions utilisées. Elle réside plutôt dans le caractère nouveau de ces raisonnements et de ces notions. Un conseil, ne vous laissez pas impressionner, ne vous braquez pas. Le temps et le travail aidant, vous allez vite comprendre dans quel nouvel endroit vous avez mis les pieds et, passé la phase de découverte, vous allez vite vous sentir en sécurité. Les chapitres 2 et 3 de géométrie dans le plan et dans l'espace vont vous être d'un grand secours car ils vous aideront à vous forger des représentations et ils guideront votre intuition.

23.1 Espace vectoriel

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

23.1.1 Définitions

Nous allons donner les axiomes qui définissent un espace vectoriel.

DÉFINITION 23.1 ♡♡♡ **$\mathbb{K}$-espace vectoriel**
Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps. On appelle *espace vectoriel* sur le corps $\mathbb{K}$ tout ensemble E muni d'une loi de composition interne + (addition)

$$+:\left\{\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}\right.$$

et d'une loi de composition externe · (multiplication par un scalaire)

$$\cdot:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array}\right.$$

telles que

1. $(E,+)$ est un groupe commutatif. On note 0_E son élément neutre.
2. Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ et pour tout $(x,y)\in E^2$, on a

   1. $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$
   2. $(\alpha\times\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$
   3. $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$
   4. $1_{\mathbb{K}}\cdot x=x$

On dit alors que $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel*. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*, ceux de E, *vecteurs*. L'élément neutre de $(E,+)$, 0_E est appelé *vecteur nul*.

Remarque 23.1 On vous avait prévenu, cela peut sembler abstrait... Cela ne l'est en fait pas tant que ça. Un espace vectoriel est un ensemble sur lequel on peut définir une addition et une multiplication par un scalaire et rien de plus, si ce n'est que cette addition et cette multiplication doivent vérifier les axiomes ci-dessus. Vous connaissez un certain nombre d'ensembles de ce type :
- $\mathbb{R}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) et $\mathbb{C}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- L'ensemble des vecteurs du plans ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$).
- L'ensemble des vecteurs de l'espace ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$).
- Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$).
- L'ensemble des suites réelles $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ou complexes $\mathscr{S}(\mathbb{C})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- L'ensemble $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) (ou dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$)) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Les ensembles de polynômes $\mathbb{R}[X]$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) et $\mathbb{C}[X]$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $n\in\mathbb{N}$.

Nous allons formaliser cette remarque dans la prochaine section.

Remarque 23.2 Prenons tout de suite de bonnes habitudes. Il est essentiel de bien distinguer les notions vectorielles des notions affines. Les espaces affines sont ceux que vous connaissez depuis le collège. Dans un **espace affine** :

1. Un vecteur est donné par deux points, un point de « départ »A et un point « d'arrivée »B. On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si ABDC est un parallélogramme.
2. Une droite est composée de points. Elle est donnée par un point par lequel elle passe et par un vecteur qui la dirige. On parle de droite affine (Voir la définition dans chapitre 2).
3. Un plan est lui aussi composé de points. Il est donné par un point par lequel il passe et par deux vecteurs qui l'engendrent. On parle de plan affine (Voir la définition dans chapitre 3).

Si on fixe une origine O dans notre espace affine, ses points peuvent être identifiés aux vecteurs d'origine O. Ce sont ces vecteurs qui nous intéressent dans un espace vectoriel. La notion de point n'a pas de sens. Dans un **espace vectoriel** :

1. Tous les éléments sont des vecteurs. On peut se les représenter comme les vecteurs d'origine O d'un espace affine.
2. Une droite est engendrée par un vecteur u (non nul) et est formée de vecteurs. On peut se l'imaginer dans un espace affine comme une droite passant par O et dirigée par u.
3. Un plan est engendré par deux vecteurs u et v (non colinéaires) et est formé de vecteurs. On peut se l'imaginer dans un espace affine comme un plan passant par O et engendré par u et v.

⚠ *Attention 23.1* Autant il est utile parfois de se représenter certaines notions d'algèbre linéaire dans le plan ou dans l'espace, autant parfois ceci est impossible...Cela n'est en général pas gênant...

23.1.2 Espaces produits

Exemple 23.2 Soit $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un corps. Alors $(\mathbb{K},+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'addition dans $\mathbb{K}$ est une loi interne sur $\mathbb{K}$ et la multiplication sur $\mathbb{K}$ peut être vue comme une loi externe. On vérifie facilement que ces deux lois vérifient les axiomes définissant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 23.3 On va munir l'ensemble des couples de réels $\mathbb{R}^2$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On définit une addition et une multiplication par un scalaire ainsi. Pour tous $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ et tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on pose :

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \quad \text{et} \quad \alpha.(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$$

On vérifie (c'est un peu long et laborieux mais c'est facile) que ces deux lois vérifient les axiomes définissant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Attention, le vecteur nul de cet espace est donné par $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)$.

⚠ *Attention 23.4* Attention au sens des opérations + et . dans les définitions ci-dessus :

Addition dans $\mathbb{R}^2$ — Addition dans $\mathbb{R}$

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

Multiplication par un scalaire dans $\mathbb{R}^2$ — Multiplication par un scalaire dans $\mathbb{R}$

$$\alpha.(x,y)=(\alpha.x,\alpha.y)$$

On généralise cette construction ainsi :

PROPOSITION 23.1 **Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$**
Sur l'ensemble des n-uplets de scalaires $\mathbb{K}^n$, on définit
– une addition +

$$+:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n\\ \big((x_1,\dots,x_n),(x'_1,\dots,x'_n)\big) & \longmapsto & (x_1+x'_1,\dots,x_n+x'_n)\end{array}\right.$$

– une multiplication par un scalaire $\cdot$

$$\cdot:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n\\ (\alpha,(x_1,\dots,x_n)) & \longmapsto & (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\end{array}\right.$$

Muni de ces lois, l'ensemble $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est le n-uplet $\boxed{0_{\mathbb{K}^n}=(0,\dots,0)}$.

Démonstration *Vérifications faciles.*

Un corollaire immédiat est alors le suivant :

COROLLAIRE 23.2 **Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$**
– Le triplet $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
– Le triplet $(\mathbb{C}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque 23.3 En particulier, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

De manière plus générale, on a :

PROPOSITION 23.3 **Produit d'espaces vectoriels**
Soient $(E_1,+,\cdot)$ et $(E_2,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur l'ensemble $E_1\times E_2$
– une addition +

$$+:\left\{\begin{array}{ccc}(E_1\times E_2)^2 & \longrightarrow & E_1\times E_2\\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) & \longmapsto & (x_1+y_1,x_2+y_2)\end{array}\right.$$

– une multiplication par un scalaire $\cdot$

$$\cdot:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times(E_1\times E_2) & \longrightarrow & E_1\times E_2\\ (\alpha,(x_1,x_2)) & \longmapsto & (\alpha\cdot x_1,\alpha\cdot x_2)\end{array}\right. .$$

Alors $(E_1\times E_2,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est $\boxed{(0_{E_1},0_{E_2})}$.

Démonstration *Vérifications faciles.*

23.1.3 Espaces de suites et de fonctions

Comme précisé dans l'introduction, on peut munir certains espaces de fonctions de structure d'espace vectoriel. Il suffit pour cela que les fonctions soient à valeurs dans un espace vectoriel.

Proposition 23.4 Espace vectoriel de fonctions
Soit X un ensemble non vide et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On définit sur l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{E})$ des fonctions définies sur X à valeurs dans E

– une addition +

$$+:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{E})^2 & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{E})\\ (f,g) & \longmapsto & f+g\end{array}\right.$$

donnée par $\forall x\in\mathrm{X},\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$

– une multiplication par un scalaire ·

$$\cdot:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times\mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{E})\\ (\alpha,f) & \longmapsto & \alpha\cdot f\end{array}\right.$$

donnée par $\forall x\in\mathrm{X},\quad (\alpha\cdot f)(x)=\alpha f(x)$

Muni de ces lois, l'ensemble $(\mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{E}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est la fonction identiquement nulle sur X à valeurs dans E : $\boxed{0_{\mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{E})}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{X} & \longrightarrow & \mathrm{E}\\ x & \longmapsto & 0_{\mathrm{E}}\end{array}\right.}$

Démonstration *Les vérifications sont immédiates.*

Attention 23.5 Attention au sens des opérations + et . dans les définitions ci-dessus :

Addition dans $\mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{E})$ — Addition dans E

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

Multiplication par un scalaire dans $\mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{E})$ — Multiplication par un scalaire dans E

$$(\alpha.f)(x)=\alpha.f(x)$$

En appliquant ce résultat avec $\mathrm{X}=\mathbb{N}$ et $\mathrm{E}=\mathbb{K}$, on obtient :

Corollaire 23.5 Suites à coefficients dans $\mathbb{K}$
Notons $\mathscr{S}(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$. Avec les lois

$$+:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{S}(\mathbb{K})\times\mathscr{S}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{K})\\ ((u_n),(v_n)) & \longmapsto & (u_n+v_n)\end{array}\right.$$

$$\cdot:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times\mathscr{S}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{K})\\ (\lambda,(u_n)) & \longmapsto & (\lambda\cdot u_n)\end{array}\right.$$

$(\mathscr{S}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est la suite constante nulle.

23.1.4 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Les quatre axiomes donnés dans la définition 23.1 ne traduisent à priori pas toutes les règles de calculs qu'on est habitué à utiliser quand on manipule des vecteurs. On va montrer que ces règles découlent bien de ces quatre axiomes.

Proposition 23.6 ♡ Règles de calcul dans un espace vectoriel
Soit $(\mathrm{E},+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous scalaires $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{K}$ et pour tous vecteurs $x,y\in\mathrm{E}$, on a

1. $0_{\mathbb{K}}\cdot x=0_{\mathrm{E}}$
2. $(-1)\cdot x=-x$
3. $(-\lambda)\cdot x=-(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot(-x)$
4. $(\alpha-\beta)\cdot x=\alpha\cdot x-\beta\cdot x$
5. $\lambda(x-y)=\lambda\cdot x-\lambda\cdot y$
6. $\lambda\cdot 0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}$
7. $\boxed{\lambda\cdot x=0_{\mathrm{E}}\iff[\lambda=0_{\mathbb{K}}\quad\text{ou}\quad x=0_{\mathrm{E}}]}$

Démonstration ♡

Les démonstrations de ces règles vous sembleront sans doute un peu arides dans un premier temps. Il est important de bien les travailler jusqu'à être capable de les refaire seul.

1.
$$\begin{aligned}0_{\mathrm{E}}+0_{\mathrm{K}}x &= 0_{\mathrm{K}}x \text{ car } (\mathrm{E},+) \text{ est un groupe}\\ &= (0_{\mathrm{K}}+0_{\mathrm{K}})\,x \text{ car } \mathbb{K} \text{ est un corps}\\ &= 0_{\mathrm{K}}x+0_{\mathrm{K}}x \text{ d'après l'axiome } 4\end{aligned}$$

D'où $0_{\mathbb{K}}\cdot x=0_{\mathrm{E}}$ en soustrayant $0_{\mathrm{K}}x$ à droite des deux membres de cette égalité.

2. *On a :*
$$\begin{aligned}x+(-1)\,x &= 1.x+(-1)\,x \text{ grâce à l'axiome } d\\ &= (1+(-1))\,x \text{ grâce à l'axiome } 1\\ &= 0_{\mathrm{K}}x \text{ car } \mathbb{K} \text{ est un corps}\\ &= 0_{\mathrm{E}} \text{ d'après le point précédent}\end{aligned}$$

donc $(-1)\,x$ est l'opposé de x. On peut alors écrire :

$-x = (-1)\,x$.

3 *on a :*

$$\begin{aligned}(-\lambda)\,x &= (-1.\lambda)\,x \text{ car } \mathbb{K} \text{ est un corps}\\ &= (-1)\,(\lambda x) \text{ d'après l'axiome } 2\\ &= -\lambda.x \text{ d'après le point précédent}\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)\,x &= \big(\alpha+(-\beta)\big)\,x \text{ car } \mathbb{K} \text{ est un corps}\\ &= \alpha x + (-\beta x) \text{ d'après l'axiome } 1\\ &= \alpha x - \beta x \text{ d'après le point précédent}\end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}\lambda\,(x-y) &= \lambda\,\big(x+(-y)\big) \text{ car } (\mathrm{E},+) \text{ est un groupe}\\ &= \lambda x + \lambda\,(-y) \text{ d'après l'axiome } 3\\ &= \lambda x + \lambda\,(-1y) \text{ d'après le second point}\\ &= \lambda x + (\lambda.(-1))\,y \text{ d'après l'axiome } 2\\ &= \lambda x + (-\lambda)\,y \text{ car } \mathbb{K} \text{ est un corps}\\ &= \lambda x - \lambda y \text{ d'après le point 3}\end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}\lambda 0_{\mathrm{E}} &= \lambda\,(x-x) \text{ car } (\mathrm{E},+) \text{ est un groupe}\\ &= \lambda x + \lambda\,(-x) \text{ d'après l'axiome } 1\\ &= \lambda x - \lambda x \text{ d'après le point 3}\\ &= 0_{\mathrm{E}} \text{ car } (\mathrm{E},+) \text{ est un groupe}\end{aligned}$$

7 *Supposons que* $\lambda x = 0_{\mathrm{E}}$. *Si* $\lambda = 0_{\mathrm{K}}$ *alors d'après le point* 1, $\lambda x = 0_{\mathrm{E}}$. *Sinon, si* $\lambda \neq 0_{\mathrm{K}}$ *alors comme* $\mathbb{K}$ *est un corps,* λ^{-1} *existe et*

$$x = 1.x = \left(\lambda.\lambda^{-1}\right)x = \lambda^{-1}\,(\lambda x) = \lambda^{-1}0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$$

et donc $x = 0_{\mathrm{E}}$. *La réciproque est évidente.*

23.2 Sous-espace vectoriel

23.2.1 Définitions

DÉFINITION 23.2 ♡ **Combinaison linéaire**

- Soient $x_1,\dots,x_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathrm{E},+,.)$. On appelle *combinaison linéaire de ces* n *vecteurs* tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ de la forme

$$x = \lambda_1\cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot x_k$$

  où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
- Si A est une partie de E, on appelle *combinaison linéaire d'éléments de* A toute combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de A.

Remarque 23.4 On montre par une récurrence facile qu'une combinaison linéaire de vecteurs de E est encore un vecteur de E.

Exemple 23.6

- Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \cos x + 2\sin x\end{array}\right.$. C'est une combinaison linéaire des deux fonctions cos et sin de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et c'est un encore un élément de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Soient $u = (1,2)$ et $v = (-1,1)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Alors la combinaison linéaire $2u - 3v = 2\,(1,2) - 3\,(-1,1) = (5,1)$ est encore un élément de $\mathbb{R}^2$.
- Soit $\omega > 0$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y'' + \omega y = 0$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles des fonctions $\varphi_1 : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \cos(\omega x)\end{array}\right.$ et $\varphi_2 : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \sin(\omega x)\end{array}\right.$.

DÉFINITION 23.3 ♡♡♡ **Sous-espace vectoriel**

Soient $(\mathrm{E},+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, une partie de E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E si et seulement si

1. La partie F est non vide : $\mathrm{F} \neq \varnothing$,
2. la partie F vérifie :

$$\forall\,(x,y) \in \mathrm{E}^2,\quad \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\quad \alpha\cdot x + \beta\cdot y \in \mathrm{F}$$

Remarque 23.5

- Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$. En effet, comme F est non vide, il existe $x \in \mathrm{F}$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $x - x = 1.x - 1.x = 0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$.

- En partant de second axiome de la définition d'un sous-espace vectoriel et au moyen d'une récurrence, on montre sans peine que F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de vecteurs de F est encore un vecteur de F.
- Dans tout espace vectoriel E, il y a toujours deux sous-espaces vectoriels importants, $F = \{0_E\}$ et $F = E$.
- Dans l'idée de faire le parallèle avec les groupes, on aurait pu définir la notion de sous-espace vectoriel de la façon suivante : F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est un sous-groupe de E stable pour la multiplication par tout scalaire.

PLAN 23.1 : Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

1. *On montre que* $F \subset E$.
2. *On montre que* $F \neq \varnothing$ *(la plupart du temps on montre que* $0 \in A$*).*
3. *Soit* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ *et soit* $(x, y) \in F^2$. *Montrons que* $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$.

On étudiera avec attention les exemples suivants :

Exemple 23.7

1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. De même, l'ensemble des nombres imaginaires purs $i\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$. En effet :
   1. $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
   2. $i\mathbb{R}$ est non vide...
   3. Si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et si $ix, iy \in i\mathbb{R}$ alors $\alpha ix + \beta iy = i\underbrace{(\alpha x + \beta y)}_{\in \mathbb{R}} \in i\mathbb{R}$.
2. Soit u un vecteur non nul du plan (ou de l'espace). L'ensemble F de tous les vecteurs du plan colinéaires à $\overrightarrow{u}$, $F = \{\lambda \overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel du plan (ou de l'espace). C'est la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{u}$:
   1. Il est clair que F est un sous-ensemble du plan (ou de l'espace).
   2. F est non vide, il contient par exemple u.
   3. Si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et si $\lambda u, \lambda' u \in F$ alors $\alpha(\lambda u) + \beta(\lambda' u) = (\alpha\lambda + \beta\lambda')\, u \in F$.
3. Soient u et v deux vecteurs non colinéaires de l'espace. L'ensemble F de toutes les combinaisons linéaires de u et v, $F = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace :
   1. Il est clair que F est un sous-ensemble de l'espace.
   2. F est non vide, il contient u, v,...
   3. Si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et si $au + bv, a'u + b'v \in F$ alors $\alpha(au + bv) + \beta(a'u + b'v) = (a\alpha + a'\beta)\, u + (b\alpha + b'\beta)\, v \in F$.

   Si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, F est le plan vectoriel engendré par u et v.
4. L'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ solutions de $2x + y - z = 0$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
   1. Il est clair que $F \subset \mathbb{R}^3$.
   2. F est non vide, le triplet $(0, 0, 0)$ est solution de $2x + y - z = 0$.
   3. Si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et si $u = (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ alors $\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')$ est élément de F. En effet $u = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$ et
   $$2(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') - (\alpha z + \beta z') = \alpha \underbrace{(2x + y - z)}_{=0 \text{ car } (x,y,z)\in F} + \beta \underbrace{(2x' + y' - z')}_{=0 \text{ car } (x',y',z')\in F} = 0.$$

      On remarque que F est un plan vectoriel.
5. L'ensemble $F = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet :
   1. Il est clair que $F \subset E$.
   2. Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ $(\cos, \sin, \exp, ...)$ donc F est non vide.
   3. Si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et si $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ alors par le théorème d'opération sur les fonctions continues, $\alpha f + \beta g$ est encore continue sur $\mathbb{R}$. Donc F est stable par combinaison linéaire.

   On montre de la même façon que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles $\mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
6. Soit F l'ensemble des fonctions définies sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui s'annulent en 0. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}([-1, 1], \mathbb{C}), +, .)$.
   1. Il est clair que $F \subset \mathscr{F}([-1, 1], \mathbb{C})$.

2. F est non vide. Par exemple, la fonction identiquement nulle sur $[-1,1]$ est élément de F.
3. Si $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ et si $f,g \in \mathrm{F}$ alors $(\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = 0$ donc $\alpha f + \beta g \in \mathrm{F}$.

7. En reprenant le troisième item de l'exemple 23.6, l'ensemble F des solutions de $y'' + \omega y = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. En effet :
   1. Toute solution de cette équation est (deux fois) dérivable et donc continue. Donc $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.
   2. F est non vide car l'équation différentielle admet des solutions, par exemple la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
   3. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et $f,g \in \mathrm{F}$. Alors $(\alpha f + \beta g)'' + \omega(\alpha f + \beta g) = \alpha \underbrace{(f'' + \omega f)}_{=0 \text{ car } f \in \mathrm{F}} + \beta \underbrace{(g'' + \omega g)}_{=0 \text{ car } g \in \mathrm{F}} = 0$ donc $\alpha f + \beta g \in \mathrm{F}$.
8. L'ensemble $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. Cela se prouve de la même façon que l'item 6. précédent.

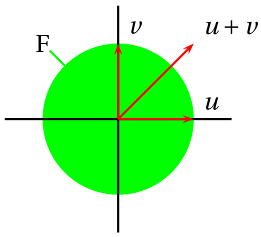
Remarque 23.6 On verra dans l'exemple 23.10 page 852 comment traiter les exemples 1., 2., 3., 4., 7. et 8. plus rapidement.

PLAN 23.2 : Pour montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E

On peut montrer au choix que
- $\mathrm{F} \not\subset \mathrm{E}$.
- $\mathrm{F} = \varnothing$.
- $0_\mathrm{E} \notin \mathrm{F}$.
- F *n'est pas stable par combinaison linéaire : il existe* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ *et* $(x,y) \in \mathrm{F}^2$ *tels que* $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \notin \mathrm{F}$.

Exemple 23.8

1. L'ensemble $\mathrm{F} = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ car il existe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 et qui ne sont pas continues sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\mathrm{F} = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid x^2 + y^2 = -1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il est vide...
3. L'ensemble $\mathrm{F} = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car le vecteur nul de E qui est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ n'est pas élément de F.
4. L'ensemble $\mathrm{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par combinaison linéaire : soient $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$. On vérifie facilement que $u, v \in \mathrm{F}$. Par contre $u + v = (1,1)$ et $\|u+v\|^2 = 2 > 1$ donc $u + v \notin \mathrm{F}$.



PROPOSITION 23.7 **Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel**
Soient $(\mathrm{E},+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, une partie *non vide* de E. On a équivalence entre les deux propositions suivantes.
1. La partie F est un sous-espace vectoriel de $(\mathrm{E},+,.)$.
2. Muni des lois de E restreintes à F, $(\mathrm{F},+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration *Soient* $(x,y) \in \mathrm{F}^2$ *et* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.
- *On vérifie que* $+$ *définit une loi interne sur* E, $x + y = 1.x + 1.y \in \mathrm{F}$ *car* F *est stable par combinaison linéaire.*
- *De même,* . *définit une loi externe sur* F. $\alpha.x = \alpha.x + 0.y \in \mathrm{F}$ *car* F *est stable par combinaison linéaire.*
- *Les axiomes d'un espace vectoriel sont vérifiés dans* F *car ils sont vérifiés dans* E

La réciproque est facile.

PLAN 23.3 : Pour montrer que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel...

... il suffit de montrer que F *est un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *dans lequel il est contenu.*

Remarque 23.7 Cette dernière proposition permet d'économiser beaucoup de travail quand on doit montrer qu'un triplet $(\mathrm{F},+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Plutôt que de vérifier tous les axiomes définissant un espace vectoriel, on cherche si F n'est pas une partie d'un espace vectoriel E (souvent bien connu) puis on vérifie que c'est un sous-espace vectoriel de E.

23.2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

PROPOSITION 23.8 **Une intersection de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel**
Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration *Soit* $i \in I$*, puisque* F_i *est un sous-espace vectoriel de* E*,* $0_E \in F_i$ *et donc* $0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$*. Soient* $(x,y) \in \bigcap_{i\in I} F_i{}^2$ *et* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$*. Montrons que* $\alpha.x+\beta.y \in \bigcap_{i\in I} F_i$*. Soit* $i\in I$*, comme* F_i *est un sous-espace vectoriel de* E *et que* $x, y \in F_i$*,* $\alpha.x+\beta.y\in F_i$ *ce qui montre que* $\alpha.x+\beta.y \in \bigcap_{i\in I} F_i$*.*

Exemple 23.9
- L'intersection de deux droites vectorielles de l'espace $\mathbb{R}^3$ dirigées par des vecteurs non colinéaires est égale au singleton $0_{\mathbb{R}^3} = \{(0,0,0)\}$ qui est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- L'intersection de deux plans vectoriels dans l'espace est une droite vectorielle si ces deux plans ne sont pas confondus.
- Dans $\mathscr{S}(\mathrm{R})$, en notant

$$F = \left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est convergente}\right\} \text{ et } G = \left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ géométrique de raison } r\right\}$$

  où $r\in\mathbb{R}$. Alors

$$F\cap G = \begin{cases} F \text{ si } r\in\,]-1,1] \\ \{(0)\} \text{ sinon}\end{cases}$$

  qui sont dans les deux cas des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

DÉFINITION - PROPOSITION 23.4 ♡♡♡ **Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel**
Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par* A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. On le note $\mathrm{V}ect\,(A)$ et on a :

$$\mathrm{V}ect\,(A) = \bigcap_{F\in\mathscr{F}_A} F$$

où $\mathscr{F}_A$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A.

Démonstration *D'après la proposition 23.8,* $\bigcap_{F\in\mathscr{F}_A} F$ *est un sous-espace vectoriel de* E*. Il contient de plus* A *et par construction, il est inclus dans tout sous-espace vectoriel de* E *contenant* A*. On a donc* $\mathrm{V}ect\,(A) = \bigcap_{F\in\mathscr{F}_A} F$*.*

Remarque 23.8
- A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathrm{V}ect\,(A) = A$.
- $\mathrm{V}ect\,(\varnothing) = \{0\}$.

PROPOSITION 23.9 ♡♡♡ **Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie**
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A = \{x_1,\dots,x_n\}$ une partie finie à n éléments de E. Le sous-espace vectoriel engendré par A est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A :

$$\boxed{\mathrm{V}ect(A) = \left\{\lambda_1\cdot x_1+\ldots+\lambda_n\cdot x_n \mid (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K^n\right\}}$$

Démonstration *Soit* $\mathscr{A}$ *l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de* A*. L'ensemble* $\mathscr{A}$ *est non vide et stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de* E*. Montrons que* $\mathscr{A}$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* A*. Pour ce faire, il suffit de montrer que si* $\mathscr{B}$ *est un sous-espace vectoriel de* E *contenant* A *alors* $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$*. Soit* $x\in\mathscr{A}$*. Par définition de* $\mathscr{A}$*, il existe* $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ *et* $x_1,\dots,x_n\in A$ *tels que* $x = \alpha_1 x_1+\ldots\alpha_n.x_n$*. Comme* $A\subset\mathscr{B}$*, il vient que* $x_1,\dots,x_n\in\mathscr{B}$ *et comme* $\mathscr{B}$ *est un sous-espace vectoriel de* E*, il est stable par combinaison linéaire et donc* $x = \alpha_1 x_1+\ldots\alpha_n.x_n\in B$*. Ce qui prouve que* $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$ *et termine la démonstration.*

Remarque 23.9
- Si $u\in E\setminus\{0\}$, la droite vectorielle engendrée par u est le sous-espace vectoriel engendré par u : $\mathrm{V}ect(u) = \{\lambda\cdot u \mid \lambda\in\mathbb{K}\}$.
- Si $u, v\in E\setminus\{0\}$, le plan vectoriel engendré par u et v est le sous-espace vectoriel engendré par $\{u,v\}$: $\mathrm{V}ect(\{u,v\}) = \left\{\alpha\cdot u+\beta\cdot v \mid (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\right\}$.

PLAN 23.4 : Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

Il suffit de décrire F *sous forme d'un* $\mathrm{V}ect$*.*

Exemple 23.10

On reprend les items 1., 2., 3., 4., 7. et 8. de l'exemple 23.7 page 849.

– Les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ donnés par $G = \mathbb{R}$ et $F = i\mathbb{R}$ s'écrivent $G = \mathrm{Vect}(1)$ et $G = \mathrm{Vect}(i)$ donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$.

– Si u est un vecteur du plan (ou de l'espace) alors $F = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u)$ donc F est un sous-espace vectoriel du plan (ou de l'espace).

– Si u et v sont des vecteurs du plan (ou de l'espace) alors $F = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u, v)$ donc F est un sous-espace vectoriel du plan (ou de l'espace).

– On a $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\} = \{(x, y, 2x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,2) + y(0,1,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0,2),(0,1,1))$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(1,0,2),(0,1,1)$.

– Soit F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}^+$. Alors après avoir résolu l'équation, on trouve que $F = \mathrm{Vect}(x \mapsto \cos\omega x, x \mapsto \sin\omega x)$. Ainsi F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

– On a $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\} = \{(X-1)(aX^2 + bX + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{aX^2(X-1) + bX(X-1) + c(X-1) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^2(X-1), X(X-1), (X-1))$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

La remarque suivante permet de fixer les choses dans l'espace :

Remarque 23.10 ♡♡♡ Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, soit $\mathscr{F} = \{u, v, w\}$ où u, v et $w \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \begin{cases} \bullet \text{ La droite dirigée par } u \text{ si les trois vecteurs sont colinéaires} \\ \bullet \text{ Le plan engendré par } u \text{ et } v \text{ si les trois vecteurs sont coplanaires mais tels} \\ \quad \text{que deux d'entre eux, } u \text{ et } v \text{ par exemple, ne sont pas colinéaires} \\ \bullet \text{ L'espace } \mathbb{R}^3 \text{ si les trois vecteurs ne sont pas coplanaires} \end{cases}$$

Donc les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont :

1. L'ensemble réduit au vecteur nul $\{0\}$
2. Les droites passant pas 0.
3. Les plans passant par 0.
4. L'espace tout entier.

Bio 20 Giuseppe Peano, né le 27 août 1858 à Spinetta di Cuneo et mort le 20 avril 1932 à Turin.

Giuseppe Peano a été un des premiers mathématiciens à comprendre la nécessité de l'axiomatisation des mathématiques. Celles-ci doivent reposer sur quelques règles simples desquelles on fait découler les théorèmes après avoir défini avec précision les objets utilisés. Grâce à cette démarche et à sa grande rigueur, il mit en évidence de nombreuses erreurs dans les traités mathématiques alors existants. Il comprit aussi l'importance de la théorie des ensembles et de la logique pour exprimer les mathématiques et généralisa au reste des mathématiques l'usage des symboles issus de ces théories . Il fut le premier à utiliser les symboles d'union et d'intersection.
Giuseppe Peano s'intéressa au début de sa carrière au calcul infinitésimal qu'il participe à formaliser et à rendre plus rigoureux. À partir de 1887, son travail se porte sur la construction formelle des mathématiques et il définit de manière axiomatique l'ensemble des entiers naturels. Ce système d'axiomes porte maintenant son nom. Grâce aux travaux de Grassmann, il axiomatise la notion d'espace vectoriel.
À partir de 1900, il s'attelle à deux grands chantiers. Le premier consiste en la construction d'un langage international qu'il baptisa « Interlingua » basé sur un latin simplifié et augmenté de vocabulaire anglais, allemand et français. Le second est l'écriture d'une encyclopédie mathématique « Formulario Mathematico » utilisant le formalisme qu'il a inventé et qui vise à contenir toutes les mathématiques alors connues. Notons que Peano, excellent enseignant au début de sa carrière finit sa vie piètre pédagogue, ses cours étant rendu complètement obscurs par ses notations.

⚠ *Attention 23.11* Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, ce n'est pas forcément le cas de $F \cup G$ et jamais le cas de $F \setminus G$, $G \setminus F$ et $E \setminus F$ car ils ne contiennent pas le vecteur nul. Par exemple :

– Deux droites vectorielles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ du plan $\mathbb{R}^2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ mais ce n'est pas le cas de leur réunion à moins que ces deux droites ne soient confondues. En effet, si ces deux droites ne sont pas confondues, la somme d'un vecteur non nul u_1 de la première droite et d'un vecteur non nul u_2 de la seconde n'est un vecteur d'aucune des deux droites et n'appartient donc pas à leur réunion.

– La partie $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$ de $E = \mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de E mais ce n'est pas le cas de $E \setminus F$. En effet, les polynômes de $E \setminus F$ sont ceux qui ne s'annulent pas en 0 donc $E \setminus F$ ne contient pas le polynôme nul.

23.3 Somme de sous-espaces vectoriels

23.3.1 Définitions

DÉFINITION - PROPOSITION 23.5 ♡♡♡ **Somme de deux sous-espaces vectoriels**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. On appelle *somme de* F *et* G et on note $F+G$ le sous-espace vectoriel de E donné par

$$F+G = \left\{x+y \mid \left(x,y\right) \in F \times G\right\}$$

Démonstration *Le sous-ensemble* $F+G$ *est bien un sous-espace vectoriel de* E*. En effet,* $F+G \subset E$ *car* E *est stable pour l'addition. De plus,* $F+G$ *est non vide car* F *et* G *le sont. Enfin, si* $u = x+y \in F+G$ *et* $u' = x'+y' \in F+G$ *avec* $x,x' \in F$ *et* $y,y' \in G$ *alors, pour* $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$*,*

$$\alpha u + \beta u' = \underbrace{\alpha x + \beta x'}_{\in F} + \underbrace{\alpha y + \beta y'}_{\in G} \in F+G$$

car F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels.*

PROPOSITION 23.10 ♡♡♡ **La somme de deux sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant leur réunion**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. Alors $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Démonstration *On a prouvé dans la remarque précédente que* $F+G$ *est un sous-espace vectoriel de* E*. Il contient* F *et* G *car* 0_E *est élément de* F *et* G *et donc* $F = F + 0_E \subset F+G$ *et* $G = 0_E + G \subset F+G$*. De plus, si on considère un sous-espace* H *de* E *qui contient* $F \cup G$ *alors montrons que* $F+G \subset H$*. Soient* $x+y \in F+G$ *avec* $x \in F$ *et* $y \in G$*. Comme* $F \cup G \subset H$*, on a aussi* $x,y \in H$ *et comme* H *est un sous-espace vectoriel, il s'ensuit que* $x+y \in H$*. Donc* $F+G \subset H$ *et* $F+G$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* F *et* G*.*

Exemple 23.12
– Soient deux droites vectorielles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ du plan euclidien $\mathscr{P}$. On a : $\mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2 = \mathscr{P}$ si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont dirigées par des vecteurs non colinéaires et $\mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2 = \mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$ sinon.
– Soient $\mathscr{D}$ une droite vectorielle de l'espace $\mathscr{V}$ dirigée par un vecteur u et $\mathscr{P}$ un plan vectoriel de l'espace. On a : $\mathscr{D} + \mathscr{P} = \mathscr{V}$ si $u \notin \mathscr{P}$ et $\mathscr{D} + \mathscr{P} = \mathscr{P}$ sinon (la droite est alors incluse dans le plan $\mathscr{P}$).
– Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ soient $F = \mathrm{V}ect(\sin)$ et $G = \mathrm{V}ect\left(exp\right)$ alors :

$$F+G = \mathrm{V}ect\left(\sin,\exp\right) = \left\{x \mapsto \alpha\sin(x) + \beta\exp(x) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$$

La proposition suivante est bien pratique pour calculer des sommes :

PROPOSITION 23.11 ♡ **Calcul pratique d'une somme de** $\mathrm{V}ect$
Soient A et B deux parties d'un K-espace vectoriel E alors

$$\boxed{\mathrm{V}ect(A) + \mathrm{V}ect(B) = \mathrm{V}ect(A \cup B)}$$

Démonstration *Voir l'exercice 23.26 page 874.*

Exemple 23.13 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les parties $F = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminons le sous-espace $F+G$. On a $F = \mathrm{V}ect(1,0,0)$ et $G = \mathrm{V}ect(1,1,0)$ donc F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. De plus $F+G = \mathrm{V}ect((1,0,0),(1,1,0))$ et on reconnait que $F+G$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,0,0)$ et $(1,1,0)$.

23.3.2 Somme directe

DÉFINITION 23.6 ♡♡♡ **Somme directe**
On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en *somme directe* si $F \cap G = \{0\}$. On note alors $F \oplus G$ leur somme.

THÉORÈME 23.12 **Caractérisation de la somme directe**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. On a équivalence entre :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall x \in F + G, \quad \exists\,!(x_1, x_2) \in F \times G : \quad x = x_1 + x_2$ (c'est-à-dire, $\boxed{\textit{tout}}$ vecteur de F + G se décompose de manière $\boxed{\textit{unique}}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.)

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* F *et* G *soient en somme directe et soit* $x \in F + G$. *Par définition, il existe* $x_1 \in F$ *et* $x_2 \in G$ *tels que* $x = x_1 + x_2$. *Supposons qu'il existe* $x_1' \in F$ *et* $x_2' \in G$ *tels qu'on ait encore* $x = x_1' + x_2'$. *Comme* $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$, *on a l'égalité :* $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$. *Notons* y *ce vecteur. Comme* F_1 *et* F_2 *sont des sous-espaces vectoriels de* E, $y = x_1 - x_1' \in F_1$ *et* $y = x_2' - x_2 \in F_2$. *Par conséquent* $y \in F_1 \cap F_2$. *Mais* F_1 *et* F_2 *étant en somme directe, on a* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ *donc* $y = 0$. *Par conséquent,* $x_1 = x_1'$ *et* $x_2 = x_2'$ *et l'unicité est prouvée.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Prouvons maintenant la réciproque. Soit* $x \in F \cap G$. *Il existe alors deux couples de* $F \times G$ *permettant de décomposer* x *en un vecteur de* F *et un vecteur de* G *:* $(x, 0)$ *et* $(0, x)$. *Par hypothèse, elles sont égales :* $(x, 0) = (0, x)$. *Par conséquent* $x = 0$ *et les sous-espaces* F *et* G *sont en somme directe.*

PLAN 23.5 : Pour montrer que F et G sont en somme directe

1. *Soit* $x \in F \cap G$.
2. $x \in F$ *donc ...*
3. $x \in G$ *donc ...*
4. *... alors* $x = 0$.

Exemple 23.14

– Dans $\mathbb{C}$, les sous-espace vectoriels $F = \mathbb{R}$ et $G = i\mathbb{R}$ sont en somme directe :

1. Soit $x \in F \cap G$.
2. $x \in F$ donc x est réel.
3. $x \in G$ est imaginaire pur.
4. Le seul complexe à la fois réel et imaginaire pur est 0 donc $x = 0$.

– Dans $\mathbb{R}^3$, les droites vectorielles $F = \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{cases}$ et $G = \begin{cases} x + y - 2z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{cases}$ sont en somme directe.

- Montrons que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{cases} \iff x = 0 \quad \text{et} \quad y = z$$

donc

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y + z = 0\right\} = \left\{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\,(0, 1, 1)\,.$$

- On montre de la même façon que $G = \mathrm{Vect}\,(1, 1, 1)$ et donc G est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Ces deux droites vectorielles ne sont pas engendrées par des vecteurs colinéaires. Elles ne se coupent donc qu'en $0_{\mathbb{R}^3}$.

– Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $F = \left\{f \in E \mid f(0) = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto 1)$. On a montré dans l'item 5. de l'exemple 23.7 page 849 que F est un sous-espace vectoriel de E. Comme G est décrit par un Vect, c'est un sous-espace vectoriel de E. Remarquons que G est l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $f \in F \cap G$.
2. $f \in F$ donc $f(0) = 0$.
3. $f \in G$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto a$.
4. Mais $a = f(0) = 0$ donc $f = 0$.

– Toujours dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}\,(\cos)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(\sin)$ sont en somme directe. Il est clair que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Montrons qu'ils sont en somme directe

1. Soit $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.
2. $f \in \mathrm{F}$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \cos$.
3. $f \in \mathrm{G}$ donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $f = \beta \sin$.
4. et il vient que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cos x = \beta \sin x$ ce qui n'est possible que si $\alpha = \beta = 0$. En effet, comme précisé, l'égalité précédente est vraie pour tout réel x. En particulier, si $x = 0$, alors $\alpha = 0$ et si $x = \pi/2$, on trouve que $\beta = 0$. Finalement, $f = 0$.

23.3.3 Sous-espaces supplémentaires

DÉFINITION 23.7 **Sous-espaces supplémentaires**
On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont *supplémentaires* si et seulement si ils vérifient :

H1 $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$

H2 $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$

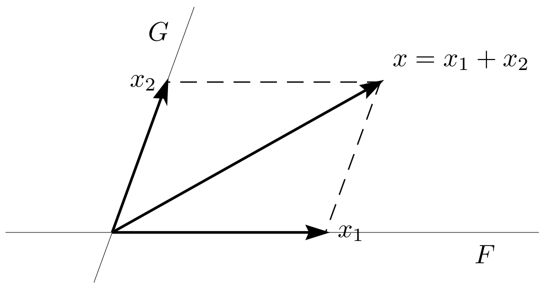


FIGURE 23.1 – Décomposition d'un vecteur suivant deux sous-espaces supplémentaires

L'intérêt de disposer d'espaces supplémentaires est donné par le théorème suivant. Il dit que si on dispose de deux sous-espaces supplémentaires F et G dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors tout vecteur de E peut être décomposé de manière unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

THÉORÈME 23.13 **Caractérisation des sous-espaces supplémentaires**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathrm{E}, +, \cdot)$. On a équivalence entre :

1. $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ (c'est-à-dire F et G sont supplémentaires).
2. $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \exists ! (x_1, x_2) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G} : \quad x = x_1 + x_2$ (c'est-à-dire, $\boxed{\text{tout}}$ vecteur de E se décompose de manière $\boxed{\text{unique}}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.)

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* F *et* G *sont supplémentaires. Soit* $x \in \mathrm{E}$. *Comme* $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$, *il existe* $x_1 \in \mathrm{F}$ *et* $x_2 \in \mathrm{G}$ *tels que* $x = x_1 + x_2$. *En appliquant la proposition 23.12, comme* F *et* G *sont en somme directe, cette décomposition est unique.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *il existe un unique couple* $(x_1, x_2) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ *tel que* $x = x_1 + x_2$ *alors on a nécessairement* $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$. *On peut de plus appliquer à nouveau la proposition 23.12 et affirmer que les deux sous-espaces* F *et* G *sont supplémentaires. On a ainsi montré que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

PLAN 23.6 : $\boxed{\text{Pour montrer que } \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}}$

1. $\boxed{\textit{Montrons que la somme est directe :}}$ *voir le plan 57 page 854.*
2. $\boxed{\textit{Montrons que } \mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G} \textit{ :}}$ *Voir la remarque ci-dessous.*

Remarque 23.11 La partie souvent difficile dans ce plan est souvent de montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$. Dans ce chapitre, on utilisera une des deux techniques suivantes :

– Si on sait écrire F et G sous forme d'un $\mathrm{V}ect$, $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(\mathrm{A})$, $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect(\mathrm{B})$, on peut, grâce à la proposition 23.11, écrire $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{V}ect(\mathrm{A}) + \mathrm{V}ect(\mathrm{B}) = \mathrm{V}ect(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$. Reste alors à montrer que $\mathrm{V}ect(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{E}$.
– Si cette technique ne fonctionne pas, on utilise alors la définition : Soit $x \in \mathrm{E}$. Posons $x_1 = \ldots$. Posons $x_2 = \ldots$. On a bien :

1. $x_1 \in \mathrm{F}$.
2. $x_2 \in \mathrm{G}$.
3. $x = x_1 + x_2$.

La difficulté de cette méthode consiste en la détermination de x_1 et x_2. On procède souvent ainsi. Dans la pratique, il est souvent facile de déterminer un des deux vecteurs x_1 ou x_2, supposons que ce soit x_1. On pose alors $x_2 = x - x_1$. Il suffit alors de vérifier que $x_2 \in \mathrm{G}$.

– On verra au chapitre 24 que grâce à la formule de Grassmann (voir 24.19 page 907) on arrivera à traiter très simplement cette question dans le cas où on travaille avec des espaces vectoriels de « dimension finie ».

Exemple 23.15

– Dans $\mathrm{E} = \mathbb{C}$, $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(\{1\})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect(\{i\})$. On sait que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. Si $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ alors x est à la fois réel et imaginaire pur donc $x = 0$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.
2. $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{V}ect(1) + \mathrm{V}ect(i) = \mathrm{V}ect(1, i) = \mathbb{C}$ donc $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.

On a montré que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

– Dans l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ la droite F donnée par le système $\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ 2x - y + z & = 0 \end{cases}$ et le plan G d'équation $z = 0$ sont supplémentaires. Comme $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(0, 1, 1)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E.

1. Si $(x, y, z) \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ alors (x, y, z) vérifie le système $\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ 2x - y + z & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$ et on trouve que $x = y = z = 0$ donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.
2. $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{V}ect(-4, 1, -3) + \mathrm{V}ect((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \mathrm{V}ect((-4, 1, -3), (1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \mathrm{E}$ car on vérifie, en utilisant par exemple le produit mixte, que ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires. Ils forment ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

On a montré que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

– Dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\mathrm{F} = \{\text{ fonctions paires}\}$ et $\mathrm{G} = \{\text{ fonctions impaires}\}$. On vérifie que F est un sous-espace vectoriel de E. F est non vide, il contient par exemple la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $f, g \in \mathrm{F}$ alors, en utilisant la parité de f et g, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x)$$

donc $\alpha f + \beta g \in \mathrm{F}$. On prouve de même que G est un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) = -f(x)$ et donc $f = 0$. Alors $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.
2. Soit $f \in \mathrm{E}$. On cherche deux fonctions f_1 et f_2 telles que f_1 est paire, f_2 impaire et $f = f_1 + f_2$. Effectuons un raisonnement par analyse et synthèse.

   Analyse : Supposons que deux telles fonctions existent. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ et que $f(-x) = f_1(x) - f_2(x)$. On tire de ces deux égalités que

   $$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

   Synthèse : Posons $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. On vérifie facilement que f_1 est paire, donc que $f_1 \in \mathrm{F}$ et que f_2 est impaire, donc que $f_2 \in \mathrm{G}$. On vérifie aussi que $f = f_1 + f_2$.

   Finalement, on a montré que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.

On a donc $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. Que dire des fonctions exp, ch et sh ?

– Toujours dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \mid f(1) = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{x \mapsto ax \mid a \in \mathbb{R}\}$. On vérifie facilement que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Pour G, on peut remarque que $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$.

1. Soit $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Comme $f \in \mathrm{F}$, $f(1) = 0$ et comme $f \in \mathrm{G}$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto ax$. Alors $f(1) = a = 0$ et donc $f = 0$. On a montré que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.
2. Soit $f \in \mathrm{E}$. S'il existe $f_1 \in \mathrm{F}$ et $f_2 \in \mathrm{G}$ tels que $f = f_1 + f_2$ alors $f(1) = f_2(1)$. On est alors invité à poser $f_2 : x \mapsto f(1)\,x$. Il est clair que $f_2 \in \mathrm{G}$. Posons $f_1 = f - f_2$. Il est clair que $f_1(1) = 0$ donc $f_1 \in \mathrm{F}$. On a bien de plus $f = f_1 + f_2$. Donc $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.

En conclusion $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

23.4 Applications linéaires

Dans toute la suite $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

23.4.1 Définitions

DÉFINITION 23.8 ♡♡♡ **Application linéaire**
Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est *linéaire* si et seulement si :

1. $\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

(On dit aussi que f est un *morphisme d'espaces vectoriels*).

THÉORÈME 23.14 ♡♡♡ **Caractérisation des applications linéaires**
Soit $f : E \to F$. f est linéaire si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \boxed{f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)}$$

Remarque 23.12
Si $f : E \to F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$. En effet $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$ donc par soustraction du vecteurs $f(0_E)$ des deux côtés de cette égalité, il vient $f(0_E) = 0_F$.

PLAN 23.7 : Pour montrer que $f : E \to F$ est linéaire

1. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $x, y \in E$.
2. *Montrons que* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$

PLAN 23.8 : Pour montrer que $f : E \to F$ n'est pas linéaire

on peut :

1. *montrer que* $f(0_E) \neq 0_F$.
2. *ou trouver* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$ *tels que* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \neq \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$

DÉFINITION 23.9 **Forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme linéaire*.
- Si $E = F$, on dit que f est un *endomorphisme* de E.
- Si $f : E \to F$ est bijective, on dit que f est un *isomorphisme de* E *sur* F.
- Si f est à la fois un endomorphisme de E et un isomorphisme, on dit que f est un *automorphisme de* E.

Exemple 23.16
- Les applications linéaires $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les applications $x \mapsto \lambda \cdot x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons qu'une telle application est linéaire. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ alors $f(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Donc f est linéaire. Montrons que les applications f de cette forme sont les seules qui soient linéaires sur $\mathbb{R}$. Si f est linéaire sur $\mathbb{R}$ alors on doit avoir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x.1) = xf(1)$ donc f est de la forme indiquée avec $\lambda = f(1)$.
- Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque E, les homothéties $h : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ sont linéaires. La preuve est identique à celle donnée dans l'item précédent.
- Les translations de vecteur non nul ne sont pas linéaires...En effet, dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, pour $u \in E$ tel que $u \neq 0$, considérons la translation $t_u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x+u \end{array} \right.$. On a $t_u(0_E) = 0_E + u = u \neq 0_F$ donc t_u n'est pas linéaire.
- La dérivation $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & D(f) = f' \end{array} \right.$ est linéaire. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ alors $D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha D(f) + \beta D(g)$.
- L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$ est une forme linéaire. En effet, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ alors $\varphi(\alpha f + \beta g) = \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$.

– L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+z) \end{array} \right.$ est linéaire. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ alors

$$\begin{aligned} \varphi\left(\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')\right) &= \varphi\left(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'\right) \\ &= \left(\alpha x + \beta x' - (\alpha y + \beta y') + \alpha z + \beta z', 2(\alpha x + \beta x') + \alpha z + \beta z'\right) \\ &= \alpha(x-y+z, 2x+z) + \beta(x'-y'+z', 2x'+z') \\ &= \alpha\varphi(x,y,z) + \beta\varphi(x',y',z'). \end{aligned}$$

23.4.2 Noyau, image d'une application linéaire

Rappels : Soient $f : E \to F$ et $E' \subset E$, $F' \subset F$. Par définition :

1. L'image de E' par f est $f(E') = \{f(x) \mid x \in E'\}$
2. L'image réciproque de F' par f est $f^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$

THÉORÈME 23.15 ♡♡♡ **Image directe et réciproque d'une application linéaire**

Soit $f : E \to G$ une application linéaire. Soient E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F alors :

1. $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

1. *Comme $0_E \in E'$ et que f est linéaire, $0_F = f(0_E) \in f(E')$ et $f(E')$ est non vide. Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ et $y, y' \in f(E')$. Il existe $x, x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Montrons que $\alpha y + \alpha' y' \in f(E')$. En utilisant la linéarité de f : $\alpha y + \alpha' y' = \alpha f(x) + \alpha' f(x') = f(\alpha x + \alpha' x')$ et donc $\alpha y + \alpha' y' \in f(E')$. $f(E')$ est donc bien un sous-espace vectoriel de* F.
2. *De même que précédemment, comme $0_F \in F'$ et que f est linéaire, $0_E \in f^{-1}(F')$. Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ et $x, x' \in f^{-1}(F')$. Il existe donc $y, y' \in F'$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Donc, toujours par linéarité de f, $f(\alpha x + \alpha' x') = \alpha y + \alpha' y' \in F'$. Il vient alors que $\alpha x + \alpha' x' \in f^{-1}(F')$.*

DÉFINITION 23.10 ♡♡♡ **Noyau, Image**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle :

– *Noyau de f* et on note $\operatorname{Ker} f$ le sous-ensemble de E : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
– *Image de f* et on note $\operatorname{Im} f$ le sous-ensemble de F : $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in E\}$.

THÉORÈME 23.16 ♡♡♡ $\operatorname{Ker} f$ **et** $\operatorname{Im} f$ **sont des sous-espaces vectoriels**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Démonstration *C'est un corollaire immédiat du théorème*

Exemple 23.17

– Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, posons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y-z \end{array} \right.$. Alors, f est une forme linéaire et $F = \operatorname{Ker} f$. On peut être ici plus précis : F est le plan vectoriel de vecteur normal $(1,1,-1)$.
– Soit $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & D(f) = f' \end{array} \right.$. On a :
  - $\operatorname{Ker} D = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \mid D(f) = 0\}$ qui est égal à l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
  - $\operatorname{Im} D = \{D(f) \mid f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})\} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Autrement dit, D est surjective. Démontrons le. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ est un intervalle, f possède une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De plus F est dérivable et sa dérivée f est continue. Donc $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. On a bien $D(F) = f$ et D est bien surjective.

THÉORÈME 23.17 ♡♡♡ **Caractérisation des applications linéaires injectives**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :

$$\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } \operatorname{Ker} f = \{0_E\}}$$

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que f est injective. Rappelons que comme f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Ainsi 0_F admet donc comme antécédent 0_E. Mais f étant injective 0_E est le seul antécédent de 0_F. Il est alors clair que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Par linéarité de f, on peut écrire que $f(x_1 - x_2) = 0_F$. Donc $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Il s'ensuit que $x_1 - x_2 = 0_E$ et donc que $x_1 = x_2$. f est donc injective.*

Exemple 23.18

– On reprend l'exemple précédent, $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & D(f) = f' \end{array} \right.$ n'est par injective car son noyau contient d'autres fonctions que la fonction nulle, comme par exemple $f : x \to 1$.

– Soit $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$. On vérifie facilement que $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$ en résolvant le système $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ et donc f est injective.

Remarque 23.13 [Caractérisation des applications linéaires surjectives] Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Par définition, f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

23.4.3 Étude de $\mathscr{L}(E, F)$

Notation 23.19 On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

PROPOSITION 23.18 ($\mathscr{L}(E,F), +, \cdot$) **est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel**
Le triplet $(\mathscr{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier, si $(f, g) \in (\mathscr{L}(E,F))^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors $\alpha f + \beta g$ est linéaire.

Démonstration *Comme F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathscr{F}(E,F)$ des fonctions de E dans F a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour montrer que $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il suffit alors de montrer que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$. Il est clair que $\mathscr{L}(E,F)$ est non vide car il contient par exemple l'application identiquement nulle $f : x \mapsto 0_F$. On vérifie de plus facilement que si $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $\alpha f + \beta g$ est linéaire. Donc $\mathscr{L}(E,F)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.*

23.4.4 Étude de $\mathscr{L}(E)$

Notation 23.20 On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

COROLLAIRE 23.19 ($\mathscr{L}(E), +, \cdot$) **est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.**
Le triplet $(\mathscr{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration *C'est une conséquence directe de la proposition précédente car $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,F)$*

PROPOSITION 23.20 **La composée de deux applications linéaires est une application linéaire**
Soient $(E, +, \cdot)$, $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

Démonstration *La preuve, facile, est laissée en exercice.*

DÉFINITION 23.11 **Identité de** E
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On définit la fonction *identité de* E par $\mathrm{I}d_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$.

DÉFINITION 23.12 **Homothétie de** E
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *homothétie vectorielle de rapport* $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application $h_\lambda = \lambda \cdot \mathrm{I}d$, $h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$.

Remarque 23.14

– Ces deux applications sont linéaires et sont donc des endomorphismes de E.
– Toute homothétie vectorielle de rapport $\lambda \neq 0$ est injective.

PROPOSITION 23.21 ($\mathscr{L}(E), +, \circ$) **est un anneau unitaire**
Le triplet $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire (généralement non commutatif).

Démonstration *On vérifie facilement que $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ vérifie les axiomes d'un anneau unitaire.*

23.4.5 Étude de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$

Notation 23.21 On note $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ l'ensemble des automorphismes de E.

PROPOSITION 23.22 ♡ **L'inverse d'une application linéaire bijective est linéaire**
Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un isomorphisme entre les espaces vectoriels E et F alors $f^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ (qui existe car f est bijective) est aussi linéaire, c'est-à-dire $f^{-1} \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$.

Démonstration *Soient $x, x' \in \mathrm{E}$ et $y, y' \in \mathrm{F}$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. On a :*

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(\alpha y + \alpha' y') & = & f^{-1}(\alpha f(x) + \alpha' f(x')) \\ & = & f^{-1}(f(\alpha x + \alpha' x')) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ & = & \alpha x + \alpha' x' \\ & = & \alpha f^{-1}(y) + \alpha' f^{-1}(y') \end{array}$$

et f^{-1} est bien linéaire.

COROLLAIRE 23.23 ♡ $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \circ)$ **est un groupe**
Le couple $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \circ)$ est un groupe (en général non commutatif) d'élément neutre $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$. On l'appelle *groupe linéaire de* E.

Démonstration *En utilisant la propriété précédente, on vérifie facilement que $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ vérifie les axiomes d'un groupe.*

Remarque 23.15 Pour prouver qu'une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est bijective on utilise souvent la propriété suivante f est bijective si et seulement s'il existe $g : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$. Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Exemple 23.22 Soient un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ vérifiant : $u^3 + u^2 + 2\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} = 0$. Montrons que $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et déterminons son inverse u^{-1}. En utilisant la linéarité de u, l'égalité se factorise en $u \circ \left[-\frac{1}{2}\left(u^2 + u\right)\right] = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ ou encore $-\frac{1}{2}\left(u^2 + u\right) \circ u = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Donc u est inversible et $u^{-1} = -\frac{1}{2}\left(u^2 + u\right)$.

23.5 Équations linéaires

23.5.1 Définitions

On va expliquer dans cette section que l'ensemble des solutions d'un système linéaire ou d'une équation différentielle linéaire sont équipés d'une même structure.

DÉFINITION 23.13 **Équations linéaires**
On appelle *équation linéaire* une équation de la forme $u(x) = b$ où :
- u est une application linéaire définie entre un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F : $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
- b est un vecteur de F appelé *second membre de l'équation*.
- L'inconnue x est à valeurs dans E.

Exemple 23.23
- Soient $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$, $\mathrm{F} = \mathbb{K}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_m)$. Soit

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Alors u est linéaire et l'équation $u(x) = b$ est équivalente au système d'équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

– Soient $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a, b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \varphi & \longmapsto & a\varphi' + b\varphi \end{array} \right. .$$

Soit $c \in F$. L'équation linéaire $\theta(\varphi) = c$ d'inconnue $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une équation différentielle du premier degré.

– Soient $E = \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $F = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ et

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \varphi & \longmapsto & a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi \end{array} \right.$$

Soit $d \in F$. L'équation linéaire $\theta(\varphi) = c$ d'inconnue $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une équation différentielle du second degré à coefficients constants.

23.5.2 Structure de l'ensemble des solutions

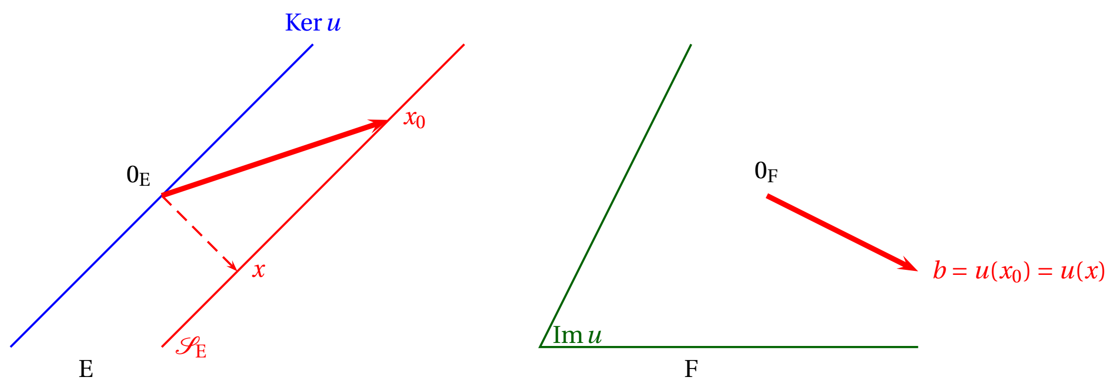


FIGURE 23.2 – Équation $u(x) = b$

PROPOSITION 23.24 **Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = b$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre : $u(x) = 0$. On a :

– $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E (et donc $\mathscr{S}_0$ est non vide !).
– Si $S \neq \varnothing$ et si $x_0 \in S$ alors $S = \{x_0 + h \mid h \in S_0\} = x_0 + S_0$

Démonstration *L'ensemble $\mathscr{S}_0$ est le noyau de u, c'est donc un sous-espace vectoriel de E d'après le théorème 23.16 page 858. Soit $x_0 \in S$, c'est-à-dire un élément x_0 de E tel que $u(x_0) = b$. Montrons que $S = \{x_0 + h \mid h \in S_0\}$. Pour ce faire, effectuons un raisonnement par double inclusion :*

$\boxed{\subset}$ *Soit $x \in S$. Alors $u(x - x_0) = u(x) - u(x_0) = b - b = 0$. Donc $x - x_0 = h \in S_0$ et $x = x_0 + h$ avec $h \in S_0$ et $x \in x_0 + S_0$.*

$\boxed{\supset}$ *Soit $h \in S_0$. On a $u(x_0 + h) = u(x_0) + u(h) = b$ et donc $x_0 + h \in S$.*

Remarque 23.16 Autrement dit, toute solution d'une équation linéaire est la somme d'une solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation linéaire. Les théorèmes 5.6 page 202 et 5.16 page 213 du chapitre 5 sont des cas particuliers de ce théorème. On retrouvera ce théorème dans le cas des systèmes linéaires au chapitre 25 section 25.11, proposition 25.56 page 981.

23.6 Projecteurs et symétries

E désigne là encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

23.6.1 Projecteurs

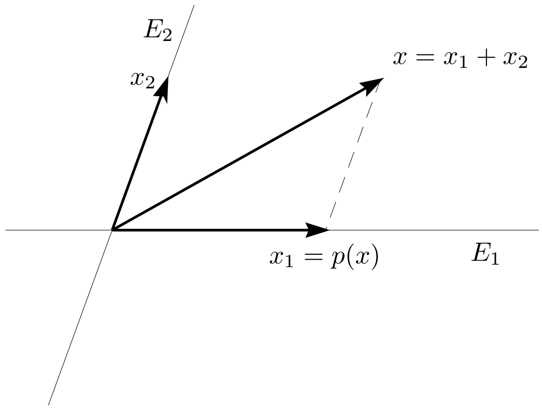


FIGURE 23.3 – Projection sur E_1 parallèlement à E_2

DÉFINITION 23.14 ♡ **Projecteurs**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$. Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Soit

$$p : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 \end{cases}$$

L'application p est bien définie et est appelée *projecteur de* E *sur* E_1 *parallèlement à* E_2.

PROPOSITION 23.25 ♡ **Propriétés des projecteurs**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$ et soit p le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 alors :

1. p est linéaire : $p \in \mathscr{L}(E)$.
2. $\operatorname{Ker} p = E_2$.
3. $\operatorname{Im} p = E_1$.
4. $p(x) = x \iff x \in E_1$ (E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p).

Démonstration

1. *Soient* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ *et* $x' = x'_1 + x'_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ *ainsi que deux scalaires* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. *On a :*

$$\alpha x + \alpha' x' = \underbrace{\left(\alpha x_1 + \alpha' x'_1\right)}_{\in E_1} + \underbrace{\left(\alpha x_2 + \alpha' x'_2\right)}_{\in E_2} \in E_1 \oplus E_2.$$

et :

$$\begin{aligned} p\left(\alpha x + \alpha' x'\right) &= \alpha x_1 + \alpha' x'_1 \\ &= \alpha p(x) + \alpha' p\left(x'\right) \end{aligned}$$

ce qui prouve que p *est linéaire.*

2. *Soient* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. *On a :*

$$p(x) = 0 \iff x_1 = 0 \iff x = x_2 \iff x \in E_2.$$

Par conséquent : $\operatorname{Ker} p = E_2$.

3. *Soient* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. *On a :*

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Im} p &\iff \exists x' = x'_1 + x'_2 \in E_1 \oplus E_2 : \quad x = p\left(x'\right) \\ &\iff x = x'_1 \in E_1 \\ &\iff x \in E_1. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Im} p = E_1$.

4. *Soit* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. *On a :*

$$p(x) = x \iff x = x_1 \iff x \in E_1$$

Proposition 23.26 ♡ **Caractérisation des projecteurs**
Soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Alors p est un projecteur si et seulement si $\boxed{p \circ p = p}$ (c'est-à-dire si et seulement si p est *idempotente*).
Dans ce cas, p est le projecteur sur $\operatorname{Ker} p$ parallèlement à $\operatorname{Im} p$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si p est un projecteur et si $x \in \mathrm{E}$, alors en appliquant la proposition précédente, $p(x) \in \mathrm{E}_1$ et comme E_1 est stable par p, $p\left(p(x)\right) = p(x)$. Donc $p \circ p = p$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$: posons $\mathrm{E}_1 = \operatorname{Im} p$ et $\mathrm{E}_2 = \operatorname{Ker} p$ et montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires dans E.*

- *Soit $x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$. Alors, on a à la fois $p(x) = 0$ car $x \in \mathrm{E}_2 = \operatorname{Ker} p$ et $x = p\left(x'\right)$ où $x' \in \mathrm{E}$ car $x \in \mathrm{E}_1 = \operatorname{Im} p$. Par conséquent : $0 = p(x) = p\left(p\left(x'\right)\right)$. Mais comme $p \circ p = p$, on a $p\left(p\left(x'\right)\right) = p\left(x'\right) = x$ et donc $x = 0$, ce qui prouve que E_1 et E_2 sont en somme directe.*
- *Soit $x \in \mathrm{E}$. On a :*
$$x = \underbrace{p(x)}_{=x_1} + \underbrace{\left(x - p(x)\right)}_{=x_2}$$
et $x_1 \in \mathrm{E}_1$ (car $x_1 = p(x) \in \operatorname{Im} p$) et $x_2 \in \mathrm{E}_2$ (car $p(x_2) = p\left(x - p(x)\right) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$). Par conséquent : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$

Donc $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$. Si $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}$, comme $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $p(x_1) = x_1$ et comme $x_2 \in \mathrm{E}_2$, $p(x_2) = 0$. Par linéarité de p, $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1$. p est donc bien le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2.

Proposition 23.27 ♡
Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$, si p est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 et si $q \in$ Ł(E) alors on a équivalence entre :

1. q est le projecteur de E sur E_2 parallèlement à E_1.
2. $\boxed{p + q = \mathrm{id}_\mathrm{E}}$.

Démonstration

- *Supposons que q est le projecteur de E sur E_2 parallèlement à E_1. Si $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ alors $p(x) = x_1$ et $q(x) = x_2$. Donc $x = p(x) + q(x)$ et on a bien $p + q = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.*
- *Réciproquement, si $p + q = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et si $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ alors $q(x) = x - x_1 = x_2$ donc q est le projecteur de E sur E_2 parallèlement à E_1.*

23.6.2 Symétries

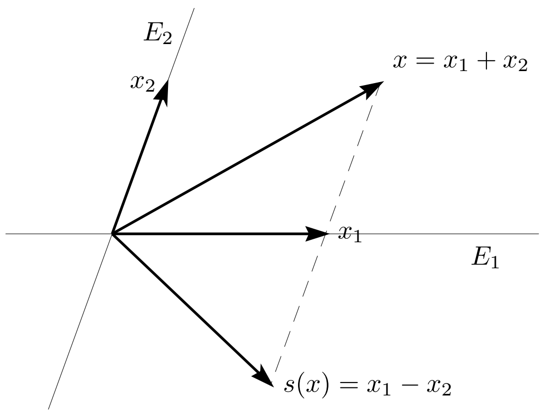


Figure 23.4 – Symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2

Définition 23.15 ♡ **Symétries**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Soit

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right.$$

s est bien définie et est appelée *symétrie par rapport à* E_1 *parallèlement à* E_2, ou plus simplement *symétrie*.

Proposition 23.28 ♡ **Propriétés des symétries**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$ et soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, alors :

1. L'application s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$.
2. Si p est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 alors $\boxed{s = 2p - \mathrm{Id}_E}$.
3. s est *involutive*, c'est-à-dire : $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration *Soit p le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2. Soit $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. On a : $p(x) = x_1$ et*

$$\left(2p - \mathrm{Id}_E\right)(x) = 2p(x) - x = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2 = s(x)$$

ce qui démontre le second point. Comme p est linéaire et qu'une combinaison linéaire d' applications linéaires est linéaire, s est linéaire et le premier point est aussi démontré. Enfin, en utilisant la linéarité et l'idempotence de p :

$$\begin{aligned} s \circ s &= \left(2p - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(2p - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= 2p \circ \left(2p - \mathrm{Id}_E\right) - \left(2p - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= 4p^2 - 2p - 2p + \mathrm{Id}_E \\ &= 4p - 4p + \mathrm{Id}_E \\ &= \mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

et le troisième point est démontré.

Proposition 23.29 ♡ **Caractérisation des symétries**
Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Si s est involutive, c'est-à-dire si $\boxed{s \circ s = \mathrm{Id}_E}$, alors s est la symétrie par rapport à $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$).

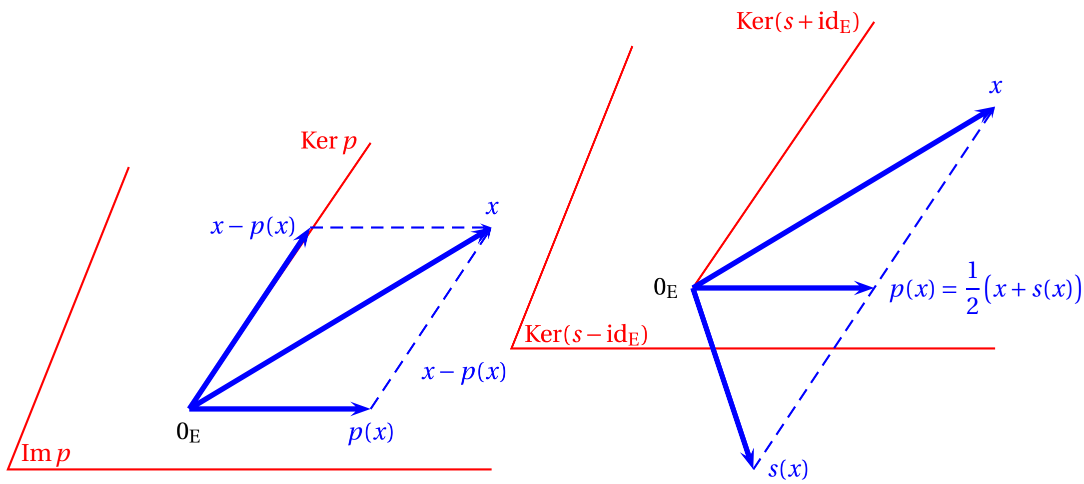
Démonstration *Supposons que s est linéaire et involutive. Posons $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires dans E.*

- *Soit $x \in E_1 \cap E_2$. On a donc : $s(x) - x = 0$ et $s(x) + x = 0$. Soustrayant ces deux égalités, on obtient $x = 0$, donc E_1 et E_2 sont en somme directe*
- *Soit $x \in E$. On a :*

$$x = \underbrace{-\frac{1}{2}\left(s(x) - x\right)}_{\in E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(s(x) + x\right)}_{\in E_2}$$

et donc $E = E_1 + E_2$.

On en déduit que $E = E_1 \oplus E_2$. De plus, si $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ alors : comme $x_1 \in E_1$, on a : $s(x_1) = x_1$ et comme $x_2 \in E_2$, on a aussi : $s(x_2) = -x_2$. Par linéarité de s, on en déduit que : $s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$. L'application s est donc bien la symétrie par rapport à E_1 et parallèlement à E_2



(a) Décomposition associée à un projecteur (b) Décomposition associée à une symétrie

Figure 23.5 – Projecteur, symétrie

En résumé

1. Les différentes définitions de ce chapitre doivent être connues avec la plus grande précision.
2. Vous devez être capable de donner différents exemples d'espace vectoriels, de sous-espaces vectoriels, de sous-espaces supplémentaires. Il faudra passer du temps à reprendre les différents exemples de ce chapitre.
3. Les notions de projecteurs et symétries doivent être bien assimilées.
4. Ne vous découragez pas. Les premiers pas en algèbre linéaire sont souvent difficiles. Le temps et le travail aidant, ces nouvelles notions vont vite s'éclaircir.

23.7 Exercices

23.7.1 Espace vectoriel

Exercice 23.1 ♡

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ *?*

1. $\left(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes\right)$ *où :*

$$\oplus : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (a,b) & \longmapsto & a \oplus b = ab \end{cases}$$

$$\otimes : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda, a) & \longmapsto & \lambda \otimes a = a^\lambda \end{cases}$$

2. $\left(\mathrm{R}^2, \oplus, \otimes\right)$ *où :*

$$\oplus : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left((a,b), \left(a',b'\right)\right) & \longmapsto & (a,b) \oplus \left(a',b'\right) = \left(a+a', b+b'\right) \end{cases}$$

$$\otimes : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (a,b)) & \longmapsto & \lambda \otimes (a,b) = (\lambda a, b) \end{cases}$$

Solution :

1. *Vérifions les différents axiomes.*
   (a) $\oplus$ *admet* 1 *comme élément neutre et si* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$*, il est clair que* $a \oplus b^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$*. Donc* $\mathbb{R}_+^*$ *est un sous-groupe du groupe commutatif* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *et* $\left(\mathbb{R}_+^*, \oplus\right)$ *admet alors bien une structure de groupe commutatif.*
   (b) *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$*. On vérifie que :*
      i. $\left(\alpha+\beta\right) \otimes x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = \alpha \otimes x \oplus \beta \otimes x$
      ii. $\left(\alpha \times \beta\right) \otimes x = x^{\alpha\beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha = \alpha \otimes \left(\beta \otimes x\right)$
      iii. $\alpha \otimes \left(x \oplus y\right) = \left(xy\right)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \alpha \otimes x \oplus \alpha \otimes y.$
      iv. $1 \otimes x = x^1 = x.$
2. *La loi externe n'est pas distributive. En effet* $(1+2) \otimes (1,2) = (3,2)$ *et* $1 \otimes (1,2) \oplus 2 \otimes (1,2) = (1,2) \oplus (2,2) = (3,4)$.

23.7.2 Sous-espace vectoriel

Exercice 23.2 ♡

On considère $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues définies sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Indiquer parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

1. *L'ensemble* F_1 *des fonctions polynomiales de degré* n *où* $n \in \mathbb{N}$.
2. *L'ensemble* F_2 *des fonctions polynomiales de degré au plus* n *où* $n \in \mathbb{N}$ *et à coefficients dans* $\mathbb{R}$.
3. *L'ensemble* F_3 *des fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$.
4. *L'ensemble* F_4 *des fonctions* f *vérifiant telles qu'il existe* $k \in \mathbb{R}$ *tel que* f *est* k*-lipschitzienne.*
5. *L'ensemble* F_5 *des fonctions* f *dérivables sur* $\mathbb{R}$ *telles que* $f(0) = 1$
6. *L'ensemble* F_6 *des fonctions* f *dérivables sur* $\mathbb{R}$ *telles que* $f(0) = 0$
7. *L'ensemble* F_7 *des fonctions* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *solutions de* $y' - y = 0$.
8. *L'ensemble* F_8 *des fonctions* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *solutions de* $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - y(t) = t$.

Solution :

1. *L'ensemble* F_1 *est clairement une partie de* E *car toute fonction polynomiale est continue sur* $\mathbb{R}$*. Elle ne contient par contre pas la fonction nulle car le polynôme correspondant est de degré* $-\infty$*. Ce n'est donc par un sous-espace vectoriel de* E.
2. *L'ensemble* F_2 *est clairement une partie de* E*. Il est évident que* F_2 *est non vide et qu'une combinaison linéaire de polynômes de degré* $\leqslant n$ *est encore un polynôme de degré* $\leqslant n$ *donc* F_2 *est un sous-espace vectoriel de* E.
3. *Toute fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc* $\mathrm{F}_3 \subset \mathrm{E}$. F_3 *est par ailleurs non vide et une combinaison linéaire de fonctions dérivables est encore dérivable donc* F_3 *est un sous-espace vectoriel de* E.

4. *Toute fonction k-lipschitzienne est continue (et même uniformément continue) sur $\mathbb{R}$ donc F_4 est bien une partie de E. Si on considère une fonction f_1 k_1-lipschitzienne et une fonction f_2 k_2-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$, on a, par application de l'inégalité triangulaire :*

$$\left|\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right)(x) - \left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right)\left(x'\right)\right| \leqslant \left(|\alpha_1| k_1 + |\alpha_2| k_2\right)\left|x - x'\right|$$

et donc $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est $|\alpha_1| k_1 + |\alpha_2| k_2$-lipschitzienne. F_4 est donc bien un sous-espace vectoriel de E.
5. *La fonction nulle n'est pas élément de F_5 donc F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*
6. *L'inclusion de F_6 dans E est évidente car toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$. F_6 est clairement non vide, la fonction identiquement nulle en est un élément. Par ailleurs, une combinaison linéaire de fonctions dérivables nulles en 0 est encore dérivable et nulle en 0 donc F_6 est bien un sous-espace vectoriel de E.*
7. *F_7 est non vide car la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$. Toute fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc F_7 est bien une partie de E. On vérifie de plus que toute combinaison linéaire de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle est encore $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle. F_7 est donc un sous-espace vectoriel de E.*
8. *La fonction identiquement nulle n'est pas solution de $y' - y = t$ donc F_8 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

Exercice 23.3 ♡

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les parties suivantes sont elles des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. *L'ensemble F_1 des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'ensemble F_2 des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.*
3. *L'ensemble F_3 des fonctions qui s'annulent au moins une fois sur $\mathbb{R}$.*
4. *L'ensemble F_4 des fonctions qui ne s'annulent jamais sur $\mathbb{R}$.*
5. *L'ensemble F_5 des fonctions qui s'annulent une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.*
6. *L'ensemble F_6 des fonctions qui valent 0 en 1.*
7. *L'ensemble F_7 des fonctions qui valent 1 en 0.*
8. *L'ensemble F_8 des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.*
9. *L'ensemble F_9 des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.*
10. *L'ensemble F_{10} des fonctions T-périodiques où T est un réel strictement positif fixé.*

Solution :

1. *Une combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée. F_1 est non vide donc F_1 est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *On considère les fonctions $f_1 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}\right.$ et $f_2 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$. f_1 et f_2 sont monotones (croissantes) mais ce n'est pas le cas de $f_1 - f_2$ comme on peut le vérifier facilement. F_2 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.*
3. *On considère les fonctions $f_1 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$ et $f_2 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array}\right.$. f_1 et f_2 s'annulent toute deux au moins une fois sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas le cas de $f_2 - f_1$. Donc F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*
4. *La fonction nulle n'est pas élément de F_4 donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*
5. *Les fonctions $f_1 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}\right.$ et $f_2 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x - \frac{1}{2} \end{array}\right.$ s'annulent une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas le cas de $f_1 - f_2 = \frac{1}{2}$. F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*
6. *On montre facilement que F_6 est un sous-espace vectoriel de E.*
7. *La fonction nulle n'est pas dans F_7. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*
8. *Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable et F_8 est non vide donc F_8 est un sous-espace vectoriel de E.*
9. *F_9 est non vide. Si f et g sont deux fonctions paires et si α, β sont deux scalaires réels alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\left(\alpha f + \beta g\right)(-x) = \left(\alpha f + \beta g\right)(x)$$

et donc F_8 est stable par combinaison linéaire. On en déduit que c'est un sous-espace vectoriel de E.
10. *On vérifie facilement que F_{10} est non vide et qu'une combinaison linéaire de fonctions T-périodiques est encore T-périodique. F_{10} est donc un sous-espace vectoriel de E.*

Exercice 23.4 ♡

On note $E = \mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions définies sur* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de* E *?*

1. $F_1 = \left\{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f'(0) = f'(1)\right\}$
2. $F_2 = \left\{f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [0,1], \quad f \geqslant 0\right\}$.
3. $F_3 = \left\{f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1\right\}$
4. $F_4 = \left\{f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$

Solution :

1. *L'ensemble* F_1 *est clairement un sous-ensemble de* E*.* F_1 *est non vide car il contient la fonction nulle. Soient* $f, g \in F_1$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. On combinaison linéaire de fonctions* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0,1]$ *est encore* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0,1]$ *et* $(\alpha f + \beta g)'(0) = (\alpha f + \beta g)'(1)$*.* F_1 *est donc bien un sous-espace vectoriel de* E*.*
2. *Une combinaison linéaire de fonctions positives n'est pas forcément positive. Il s'ensuit que* F_2 *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E*.*
3. *L'intégrale entre* 0 *et* 1 *de la fonction nulle est nulle. Cette fonction n'est donc pas élément de* F_3 *et* F_3 *ne peut être un sous-espace vectoriel de* E*.*
4. *L'ensemble* F_4 *est clairement une partie non vide de* E*. De plus, une combinaison linéaire de fonctions d'intégrales nulles est d'intégrale nulle et si* $f, g \in F_4$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *alors, par linéarité de l'intégrale :* $\int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$*.* F_4 *est donc bien stable par combinaison linéaire et c'est bien un sous-espace vectoriel de* E*.*

Exercice 23.5 ♡

On note $E = \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des suites réelles. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *?*

1. $F_1 = \left\{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est bornée}\right\}$
2. $F_2 = \left\{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est monotone}\right\}$
3. $F_3 = \left\{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est convergente}\right\}$
4. $F_4 = \left\{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est convergente vers } 0\right\}$
5. $F_5 = \left\{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est convergente vers } l\right\}$ *où* l *est un réel fixé non nul.*
6. $F_6 = \left\{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est divergente}\right\}$
7. $F_7 = \left\{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est géométrique}\right\}$
8. $F_8 = \left\{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est géométrique de raison } a\right\}$ *où* a *est un réel fixé.*

Solution :

1. *Une combinaison linéaire de suites bornées étant encore bornée, on vérifie facilement que* F_1 *est un sous-espace vectoriel de* E*.*
2. *En considérant par exemple les suites* (u_n) *et* (v_n) *de terme général* $u_n = n^2$ *et* $v_n = 4n - 1$ *on vérifie que* (u_n) *et* (v_n) *sont croissantes mais que* $u_n - v_n$ *n'est pas monotone (il suffit de calculer les* 4 *premiers termes de cette suite).* F_2 *n'est donc pas stable par combinaison linéaire et ne forme donc pas un sous-espace vectoriel de* E*.*
3. *L'ensemble* F_3 *est clairement une partie non vide de* E*. Par le théorème d'opérations sur les limites, on sait qu'une combinaison linéaire de suites convergentes est encore convergente. Donc* F_3 *est un sous-espace vectoriel de* E*.*
4. *L'ensemble* F_4 *est une partie non vide de* E*. Par le théorème d'opérations sur les limites, on sait qu'une combinaison linéaire de suites convergentes vers* 0 *est encore convergente vers* 0*. Donc* F_3 *est un sous-espace vectoriel de* E*.*
5. *La suite nulle ne converge pas vers* $l \neq 0$ *et donc* F_5 *ne peut être un sous-espace vectoriel de* E*.*
6. *La suite nulle n'est pas divergente et donc n'appartient pas à* F_6 *qui ne peut du coup être un sous-espace vectoriel de* E*..*
7. *Une combinaison linéaire de suites géométriques n'est pas forcément géométrique donc* F_7 *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E*.*
8. *L'ensemble* F_8 *est une partie non vide de* E*. On vérifie facilement qu'un combinaison linéaire de suites de raison* a *est encore une suite géométrique de raison* a *et* F_8 *est donc un sous-espace vectoriel de* E*.*

Exercice 23.6 ♡

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ *?*

1. $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y \geqslant 0\}$
2. $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
3. $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$
4. $F_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 3\}$

Solution : *Rappelons qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si c'est le singleton $\{0\}$, une droite vectorielle ou $\mathbb{R}^2$ tout entier.*

1. *Le couple $(0,1)$ est élément de F_1 mais ce n'est pas le cas du couple $(0,-1)$ qui lui est pourtant colinéaire. F_1 n'est donc pas stable par combinaison linéaire et ce ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Le couple nul $(0,0)$ n'est pas élément de F_2 et donc F_2 ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*
3. *On vérifie facilement que F_3 est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. Si $(x,y),(x',y') \in F_3$ et si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ alors on vérifie facilement que $\alpha x+\beta x' = \alpha y+\beta y'$ et donc que $\alpha(x,y)+\beta(x',y') \in F_3$. F_3 est donc un sous-espace vectoriel de R^2.*
4. *Le couple nul $(0,0)$ n'est pas élément de F_4 et donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 23.7 ♡

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $G = \{(s-t, s+t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\}$.

1. *Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer $F \cap G$.*

Solution : *Rappelons qu'une partie de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est le singleton $\{0\}$, une droite vectorielle, un plan vectoriel ou $\mathbb{R}^3$ tout entier.*

1. *F est une partie non vide de $\mathbb{R}^3$. Si $(x,y,z),(x',y',z') \in F$ et si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ alors on vérifie facilement que le triplet $\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$ vérifie l'équation $x+y+z=0$. F est donc stable par combinaison linéaire et forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (on aura reconnu que F est un plan vectoriel de l'espace). On vérifie aussi que G est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^3$ et si $(s-t, s+t, t)$ et $(s'-t', s'+t', t')$ sont deux éléments de G (avec $s,s',t,t' \in \mathbb{R}$) et si alors $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ alors :*
$$\alpha(s-t, s+t, t) + \beta(s'-t', s'+t', t') = (S-T, S+T, T)$$
avec $S = \alpha s + \beta s'$ et $T = \alpha t + \beta t'$ et donc G est aussi stable par combinaison linéaire (On aura là encore remarqué que G est un plan vectoriel de l'espace).
2. *Pour déterminer $F \cap G$ il suffit de résoudre le système $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x = s-t \\ y = s+t \\ z = t \end{cases}$ et on obtient comme ensemble solution celui paramétré par : $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$ (on reconnait l'équation paramétrée d'une droite vectorielle).*

Exercice 23.8 ♡♡

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel A de E. On suppose que $A \neq \{0_E\}$ et $A \neq E$. Montrer que la partie $B = (E \setminus A) \cup \{0_E\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Solution : *Par l'absurde, supposons que B est un sous-espace vectoriel de E. Soient $a \in A$ et $b \in B$ deux vecteurs non nuls. Posons $x = a + b$. Comme E est un espace vectoriel, x est élément de E et comme $E = A \cup B$, soit $x \in A$, soit $x \in B$. Si $x \in A$ alors $b = x - a$ est élément de A car A est un sous-espace vectoriel. Mais $A \cap B = \{0\}$ donc $b = 0$ ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ. De même, si $x \in B$ alors $a = x - b \in B$ et $a = 0$ ce qui est aussi une contradiction. En conclusion, B ne peut être un sous-espace vectoriel de E.*

23.7.3 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Exercice 23.9 ♡

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$F \cap G = F + G \Longleftrightarrow F = G$$

Solution :

– $\boxed{\Rightarrow}$ *Soit* $x \in F$. *Alors* $x = x + 0 \in F + G = F \cap G$. *Donc* $x \in G$. *Ce qui prouve que* $F \subset G$. *On montre de la même façon que* $G \subset F$ *et donc que* $F = G$.

– $\boxed{\Leftarrow}$ *Trivial.*

Exercice 23.10 ♡

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. *Montrer que* $F \cup G$ *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si* $F \subset G$ *ou* $G \subset F$.

Solution :

– $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* $F \not\subset G$ *et que* $G \not\subset F$. *On peut alors trouver deux vecteurs non nuls* $x \in F \setminus G$ *et* $y \in G \setminus F$. $x + y$ *ne peut être élément de* $F \cup G$ *: sinon on aurait* $x + y \in F$ *(ou* $x + y \in G$*) et donc,* F *étant stable par combinaison linéaire* $y = x + y - x$ *serait élément de* F *(on fait le même raisonnement si* $x + y \in G$*) ce qui n'est pas possible par hypothèse. Par conséquent* $F \cup G$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E. *La première implication est ainsi prouvée par contraposée.*

– $\boxed{\Leftarrow}$ *Trivial.*

Exercice 23.11 ♡

On considère un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E, *et l'on note* $\mathcal{V}(E)$ *l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de* E. *On se donne un sous-espace vectoriel* $V \in \mathcal{V}(E)$ *et l'on définit l'application*

$$\varphi_V : \begin{cases} \mathcal{V}(E) & \longrightarrow & \mathcal{V}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap V \end{cases}$$

Montrer que

$$(i) \quad \varphi_V \text{ injective} \iff (ii) \quad \varphi_V \text{ surjective} \iff (iii) \quad V = E$$

Solution :

1. $(i) \implies (iii)$ *: il suffit de prendre* $X_1 = E$ *et* $X_2 = V$. *Alors comme* $\varphi(X_1) = \varphi(X_2) = V$ *et que* φ *est injective,* $X_1 = X_2$*, c'est-à-dire* $V = E$.
2. $(iii) \implies (i)$ *: le résultat est clair car dans ce cas* $\varphi_E = \mathrm{id}$.
3. $(ii) \implies (iii)$ *: comme* $E \in \mathcal{V}(E)$ *et que* φ *est surjective, il possède un antécédent* $X \in \mathcal{V}(E)$ *et l'égalité* $X \cap V = E$ *n'est possible que si* $V = E$.
4. $(ii) \implies (i)$ *: clair car dans ce cas* $\varphi_E = \mathrm{id}$.

Exercice 23.12 ♡

On considère un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E, *et l'on note* $\mathcal{V}$ *l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de* E. *On se donne un sous-espace vectoriel* $V \in \mathcal{V}$ *et l'on définit l'application*

$$\varphi_V : \begin{cases} \mathcal{V}(E) & \longrightarrow & \mathcal{V}(E) \\ X & \longmapsto & X + V \end{cases}$$

Montrer que

$$(i) \quad \varphi_V \text{ injective} \iff (ii) \quad \varphi_V \text{ surjective} \iff (iii) \quad V = \{0_E\}$$

Solution :

1. $(iii) \implies (i)$ *et* $(iii) \implies (ii)$ *sont claires puisque si* $V = \{0_E\}$, $\varphi_V = \mathrm{id}_{\mathcal{V}(E)}$.
2. $(i) \implies (iii)$ *: par l'absurde, si* $V \neq \{0_E\}$*, il existe* $v \in V$ *tel que* $v \neq 0_E$. *En prenant* $X_1 = \{0_E\}$ *et* $X_2 = \mathrm{Vect}(v)$*, on aboutit à une contradiction car* $\varphi(X_1) = V = \varphi(X_2)$.
3. $(ii) \implies (iii)$ *: par l'absurde, si* $V \neq \{0_E\}$*, il existe* $v \in V$ *avec* $v \neq 0_E$. *En posant* $Y = \{0\}$*, on ne lui trouve pas d'antécédent par* φ_V.

Exercice 23.13 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et quatre sous-espaces vectoriels* A, B, C *et* D *de* E. *Montrer que*

1. $A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C$.
2. $A + \big(B \cap (A + C)\big) = (A + B) \cap (A + C)$;
3. $A \cap \big(B + (A \cap C)\big) = (A \cap B) + (A \cap C)$.
4. $A \cap B = C \cap D \implies \big(A + (B \cap C)\big) \cap \big(A + (B \cap D)\big) = A$;

Solution :

1. *Considérons* $z \in A \cap B + A \cap C$. *Il existe* $x \in A \cap B$ *et* $y \in A \cap C$ *tels que* $z = x + y$. *Mais comme* $x, y \in A$ *et que* A *est un sous-espace vectoriel,* $z \in A$. *Comme* $x \in B$ *et* $y \in C$, $z = x + y \in A + C$. *En conclusion,* $z \in A \cap (B + C)$. *Réciproquement, si* $z \in A \cap (B + C)$ *alors* $z \in A$ *et il existe* $x \in B$ *et* $y \in C$ *tels que* $z = x + y$.
2. *D'après la question précédente,* $(A+B)\cap(A+C) = A\cap A + A\cap C + B\cap A + B\cap C = A + A\cap B + A\cap C + B\cap C = A + B\cap C$ *car* A *est un sous-espace vectoriel et* $A\cap B, A\cap C \subset A$. *De même,* $A + \big(B\cap(A+C)\big) = A + (A\cap B + B\cap C) = A + B\cap C$. *On en déduit l'égalité.*
3. *Toujours d'après la première question* $A \cap \big(B + (A\cap C)\big) = A\cap B + A\cap A\cap C = A\cap B + A\cap C$ *et* $A\cap\big(B + (A\cap C)\big) = (A\cap B) + (A\cap C)$.
4. *Supposons que* $A \cap B = C \cap D$. *Alors*

$$\big(A + (B\cap C)\big)\cap\big(A + (B\cap D)\big) = A\cap A + \underbrace{A\cap B}_{C\cap D}\cap D + \underbrace{A\cap B}_{C\cap D}\cap C + B\cap\underbrace{C\cap D}_{A\cap B} = A + C\cap D + A\cap B = A + A\cap B = A$$

car A *est un sous-espace vectoriel et que* $A\cap B \subset A$.

Exercice 23.14 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et trois sous-espaces* F, G *et* H *de* E. *On suppose que*

$$\begin{cases} F + G = F + H \\ F\cap G = F\cap H \\ G \subset H \end{cases}$$

A-t-on toujours $G = H$ *?*

Solution : *Montrons que* $G = H$. *On sait déjà que* $G \subset H$. *Il suffit donc de montrer l'inclusion réciproque. Soit* $h \in H$. *Alors* $h \in F + H = F + G$. *Donc il existe* $f \in F$ *et* $g \in G$ *tels que* $h = f + g$. *Mais comme* $f = h - g$, *que* $h - g \in H$ *(car* $h \in H$, $g \in G \subset H$ *et* H *est un sous-espace vectoriel) alors* $f \in F\cap H = F\cap G$. *Donc* $f \in G$ *et* $h = f + g \in F$. *Ce qui prouve que* $H \subset F$. *En conclusion* $H = G$.

23.7.4 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Exercice 23.15 ♡

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *:*

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$
3. $F_3 = \{(t, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Solution :

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1))$
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\} = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,2))$
3. $F_3 = \{(t, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-2))$

Exercice 23.16 ♡

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *:*

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$
2. $F_2 = \{(2s + t, s - t, s + t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y - z = 0\}$
4. $F_4 = F \cap G$ *avec* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$ *et* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y - z = 0\}$
5. $F_5 = \{(2t, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Solution :

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0,1), (0,1,1))$.
2. $F_2 = \{(2s + t, s - t, s + t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \{s(2,1,1) + t(1,-1,1) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((2,1,1), (1,-1,1))$.
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y - z = 0\} = \{(0, y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0,1,1))$.

4. $F_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-2z=0\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x-y-z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-2z=0 \quad \text{et} \quad 3x-y-z=0\}$ $=\{(x,5x,-2x)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,5,-2))$.
5. $F_5=\{(2t,3t,t) \mid t\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((2,3,1))$.

Exercice 23.17 ♡

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *:*

1. $F_1=\mathbb{R}_2[X]$
2. $F_2=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}$
3. $F_3=\{P' \mid P\in\mathbb{R}_n[X]\}$ *où* $n\in\mathbb{N}$
4. $F_4=\{a(X^3-1)+b(X^2-2)+c(X+4) \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$
5. $F_5=\{P\in\mathbb{R}_4[X] \mid P(1)=P(2)=0\}$
6. $F_6=\{P\in\mathbb{R}_2[X] \mid P'=0\}$
7. $F_7=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P''=0\}$
8. $F_8=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^1 P(t)\,dt=0\right\}$

Solution :

1. $F_1=\mathbb{R}_2[X]=\mathrm{Vect}(X^2,X,1)$.
2. $F_2=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}=\{(X-1)P \mid P\in\mathbb{R}_2[X]\}=\mathrm{Vect}((X-1)X^2,(X-1)X,(X-1)1)$.
3. $F_3=\{P' \mid P\in\mathbb{R}_n[X]\}=R_{n-1}[X]=\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^{n-1})$.
4. $F_4=\{a(X^3-1)+b(X^2-2)+c(X+4) \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}=\mathrm{Vect}(X^3-1,X^2-2,X+4)$.
5. $F_5=\{P\in\mathbb{R}_4[X] \mid P(1)=P(2)=0\}=\{(X-1)(X-2)P \mid P\in\mathbb{R}_2[X]\}$ $=\mathrm{Vect}(X^2(X-1)(X-2),X(X-1)(X-2),(X-1)(X-2))$.
6. $F_6=\{P\in\mathbb{R}_2[X] \mid P'=0\}=\mathrm{Vect}(1)$.
7. $F_7=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P''=0\}=\{aX+b | a,b\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(X,1)$.
8. *Soit* $P=aX^2+bX+c\in F_8$ *où* $a,b,c\in\mathbb{R}$. *On a :* $\int_0^1 P(t)\,dt=0$ *si et seulement si* $2a+3b+6c=0$ *. Donc* $F_8=\{aX^2+bX+c| \ a,b,c\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad 2a+3b+6c=0\}=\left\{aX^2+bX-\frac{a}{3}-\frac{b}{2} | \ a,b\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}(X^2-\frac{1}{3},X-\frac{1}{2})$.

Exercice 23.18 ♡

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *:*

1. $F_1=\{f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid y'-2ty=0\}$
2. $F_2=\{f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f''+\omega^2 f=0\}$ *où* $\omega\in\mathbb{R}_+^*$
3. $F_3=\{f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f''+2f'+f=0\}$
4. $F_4=\{f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f''-4f=0\}$

Solution :

1. *Les fonctions solutions de* $y'-ty=0$ *sont les fonctions* $\varphi_\alpha:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \alpha e^{t^2}\end{array}\right.$ *où* $\alpha\in\mathbb{R}$*.Donc* $F_1=\mathrm{Vect}(\varphi_1)$.
2. *Les fonctions solutions de* $f''+\omega^2 f=0$ *sont les fonctions* $\varphi_{\alpha,\beta}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \alpha\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t)\end{array}\right.$ *où* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*. Donc* $F_2=\mathrm{Vect}(t\mapsto\cos(\omega t),t\mapsto\sin(\omega t))$.
3. *Les fonctions solutions de* $f''+2f'+f=0$ *sont les fonctions* $\varphi_{\alpha,\beta}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \alpha e^{-t}+\beta te^{-t}\end{array}\right.$ *où* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*. Donc* $F_3=\mathrm{Vect}(t\mapsto e^{-t},t\mapsto te^{-t})$.
4. *On montre de même que* $F_4=\mathrm{Vect}(t\mapsto e^{2t},t\mapsto e^{-2t})$.

Exercice 23.19 ♡

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *:*

1. *L'ensemble* F_1 *des suites réelles constantes.*
2. *L'ensemble* F_2 *des suites arithmétiques.*
3. *L'ensemble* F_3 *des suites géométriques de raison* 2.
4. *L'ensemble* F_4 *des suites réelles nulles à partir du rang* 3.

Solution :

1. $F_1=\mathrm{Vect}((1))$.
2. $F_2=\mathrm{Vect}((1),(n))$
3. $F_3=\mathrm{Vect}((2^n))$
4. $F_4=\mathrm{Vect}((1,0,0,0,\dots),(0,1,0,0,\dots),(0,0,1,0,\dots))$

Exercice 23.20 ♡

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$*, on considère les vecteurs* $e_1 = (1,1,0)$ *et* $e_2 = (1,2,1)$*. Déterminer* $\text{Vect}(e_1, e_2)$*.*

Solution : *On trouve que*

$$\text{Vect}(e_1, e_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

C'est un plan vectoriel.

Exercice 23.21 ♡

On note $E = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x - \varphi)\}$ *Déterminer une partie* A *de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *telle que* $E = \text{Vect}(A)$*.*

Solution : *Grâce à la trigonométrie, on a les équivalences :*

$$\begin{aligned} & f \in E \\ \iff & \exists (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x - \varphi) \\ \iff & \exists (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos\varphi\cos x + a\sin\varphi\sin x \\ \iff & \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x \end{aligned}$$

Donc $\boxed{E = \text{Vect}(\cos, \sin)}$.

Exercice 23.22 ♡

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des fonctions d'une variable réelle. On définit les systèmes de vecteurs*

$$S = (x \mapsto 1, x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos 2x) \quad T = (x \mapsto 1, x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos^2 x).$$

Montrer que $\text{Vect}(S) = \text{Vect}(T)$*.*

Solution : *Comme pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$*, il est clair que* $x \mapsto \cos 2x \in \text{Vect}(T)$*. Il s'ensuit que* $\text{Vect}(S) \subset \text{Vect}(T)$*. De même, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ *et donc* $x \mapsto \cos^2 x \in \text{Vect}(S)$*. Donc* $\text{Vect}(T) \subset \text{Vect}(S)$*. En conclusion* $\text{Vect}(S) = \text{Vect}(T)$*.*

Exercice 23.23 ♡♡

Dans $\mathbb{R}^4$*, montrer que les vecteurs* $v_1 = (1,0,0,1)$ *et* $v_2 = (2,1,-1,0)$ *engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs* $v_3 = (3,1,-1,1)$ *et* $v_4 = (5,2,-2,1)$*.*

Solution : *Comme* $v_3 = v_1 + v_2$ *et que* $v_4 = v_1 + 2v_2$*, il est clair que* v_3 *et* v_4 *sont éléments de* $Vect(v_1, v_2)$*. Donc* $Vect(v_3, v_4) \subset Vect(v_1, v_2)$*. On remarque de plus que* $v_1 = 2v_3 - v_4$ *et que* $v_2 = v_4 - v_3$*. Donc de la même façon,* $Vect(v_1, v_2) \subset Vect(v_3, v_4)$*. En conclusion* $Vect(v_1, v_2) = Vect(v_3, v_4)$

Exercice 23.24 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* F *un sous-espace vectoriel de* E*. On pose* $A = E \setminus F$*.*

1. *Montrer que* $\forall x \in F,\ \forall y \in A,\ x + y \in A$*.*
2. *En déduire que si* $F \neq E$*, alors* $\text{Vect}(A) = E$*.*

Solution :

1. *Soit* $x \in F$ *et* $y \in A$*. Par l'absurde, si* $x + y \notin A$*, alors* $x + y \in F$ *et il existe* $f \in F$ *tel que* $x + y = f$ *mais alors* $y = f - y \in F$ *(car* F *est un sous-espace vectoriel), ce qui n'est pas possible.*
2. *Supposons que* $F \neq E$*. Par conséquent, il existe* $y \in A$*. Montrons alors que* $E \subset \text{Vect}(A)$*. Soit* $x \in E$*. Si* $x \in A$*, alors* $x \in \text{Vect}(A)$*. Supposons donc que* $x \notin A$*. Alors* $x \in F$ *et d'après 1. ,* $x + y \in A$*. On écrit alors*

$$x = (x + y) - y$$

Et donc x *est combinaison linéaire des vecteurs* $(x + y)$ *et* y *qui appartiennent à* A*. Par conséquent,* $x \in \text{Vect}(A)$*.*

Exercice 23.25 ♡

Soient A *et* B *deux parties d'un* $\mathbb{K}$*−espace vectoriel* E*.*

1. *Si* $A \subset B$*, montrer que* $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$*.*
2. *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E*, montrer que* $\text{Vect}(F) = F$*.*
3. *Montrer que* $\text{Vect}\big(\text{Vect}(A)\big) = \text{Vect}(A)$*.*

Solution :

1. *Comme* $\mathrm{Vect}(A)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* A *et que* $\mathrm{Vect}(B)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *qui contient* B *et donc* A*, on a forcément* $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.
2. *De même, comme* F *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* F *donc* $\mathrm{Vect}(F) = F$.
3. *On applique la question précédente avec* $F = \mathrm{Vect}(A)$. *On obtient* $\mathrm{Vect}\big(\mathrm{Vect}(A)\big) = \mathrm{Vect}(A)$.

Exercice 23.26 ♡♡

Soient A *et* B *deux parties d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. *Montrer que :*

$$\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$$

Solution :

– $\boxed{\subset}$ $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *qui contient* A *et* B. *Il contient donc* $\mathrm{Vect}(A \cup B)$.

– $\boxed{\supset}$ *Soit* $x \in \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$. *Il existe* $x_A \in \mathrm{Vect}(A)$ *et* $x_B \in \mathrm{Vect}(B)$ *tels que* $x = x_A + x_B$. *Le vecteur* x_A *est combinaison linéaire de vecteurs de* A*,* x_B *est combinaison linéaire de vecteurs de* B. *Par conséquent* x *est combinaison linéaire de vecteurs de* A *et de vecteurs de* B. *Le vecteur* x *est donc bien élément de* $\mathrm{Vect}(A \cup B)$.

23.7.5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires - Somme directe

Exercice 23.27 ♡

Soient $F = \{(s,0) \mid s \in \mathbb{R}\}$ *et* $G = \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. *Prouver que* $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Solution : *Comme* $F = Vect(1,0)$ *et que* $G = Vect(0,1)$, F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^2$. *Si* $(x,y) \in F \cap G$ *alors* $y = 0$ *car* $(x,y) \in F$ *et* $x = 0$ *car* $(x,y) \in G$. *Donc* $F \cap G = \{0\}$. *Si* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *alors* $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ *et on a bien décomposé* (x,y) *en la somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G. *Donc* $F + G = \mathbb{R}^2$. *En conclusion,* $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Exercice 23.28 ♡

Soient $F = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s + t = 0\}$ *et* $G = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s - t = 0\}$. *Prouver que* $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Solution : *On vérifie que* $F = Vect(1,-1)$ *et que* $G = \mathrm{Vect}(1,1)$ *donc ce sont deux sous-espace vectoriels de* $\mathbb{R}^2$. *Si* $(x,y) \in F \cap G$ *alors ce couple vérifie le système* $\begin{cases} s+t &= 0 \\ s-t &= 0 \end{cases}$ *dont l'unique solution est* $(0,0)$ *donc* $F \cap G = \{0\}$. *Pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *cherchons* $(s,t) \in F$ *et* $(s',t') \in G$ *en sorte que* $(x,y) = (s,t) + (s',t')$. *On doit avoir :*

$$\begin{cases} s+s' &= x \\ t+t' &= y \\ s+t &= 0 \\ s'-t' &= 0 \end{cases}.$$

On résout ce système et on trouve $(s,t) = \frac{1}{2}(x-y,-x+y)$ *et* $(s',t') = \frac{1}{2}(x+y,x+y)$. *En conclusion,* $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Exercice 23.29 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(t,-t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Solution : *On vérifie facilement que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E. *Pour déterminer* $F \cap G$ *il suffit de résoudre le système* $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ *ce qui amène* $F \cap G = \{(0,0,0)\}$. F *et* G *sont donc en somme directe. Comme la droite vectorielle n'est pas incluse dans le plan vectoriel* F*, le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* F *et* G *est* E *et donc* $F + G = E$. *On a ainsi montré que* $F \oplus G = E$.

Exercice 23.30 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{F}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+y+z=0\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G}=\{(3t,2t,t \mid t\in\mathbb{R}\}$$

Solution : *On vérifie facilement que* F *et* G *sont des sous-espace vectoriels de* E*. Pour déterminer* $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ *il suffit de résoudre le système* $\begin{cases} x-y+z=0\\ 2x+y+z=0\\ x=3t\\ y=2t\\ z=t\end{cases}$ *ce qui amène* $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{(0,0,0)\}$. F *et* G *sont donc en somme directe.* F *et* G *étant des droites vectorielles de l'espace, le plus petit sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *les contenant est un plan vectoriel.* F *et* G *ne sont donc par supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercice 23.31 ♡

Soient $\mathrm{F}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\right\}$ *et* $\mathrm{G}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\right\}$*. Ces deux sous-espaces sont-ils en somme directe dans* $\mathbb{R}^3$ *?*

Solution :
On montre facilement que $\mathrm{F}=\mathrm{V}ect\left((1,1,0),(0,1,1)\right)$ *et que* $\mathrm{G}=\mathrm{V}ect\left((1,0,1),(0,1,1)\right)$*. Ce sont donc deux sous-espace vectoriels de* $\mathbb{R}^3$*.* F *et* G *sont en fait des plans vectoriels de* $\mathbb{R}^3$*. Leurs équations ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas confondus. Leur intersection est une droite d'équation cartésienne* $\begin{cases} x-y+z=0\\ x+y-z=0\end{cases}$ *et n'est donc par réduite à* $\{0\}$*.* F *et* G *ne sont donc pas en somme directe dans* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercice 23.32 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathrm{E}=\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$

$$\mathrm{F}=\left\{\mathrm{P}\in\mathrm{R}_2[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}'=0\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G}=\mathrm{V}ect\left(\mathrm{X},\mathrm{X}^2\right)$$

Solution : *Comme* $\mathrm{F}=\mathrm{V}ect(1)$ *et* $\mathrm{G}=\mathrm{V}ect\left(\mathrm{X},\mathrm{X}^2\right)$*, ces deux ensembles sont des sous-espace vectoriels de* E*. Il est clair que* $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0\}$ *car si* $\mathrm{P}\in\mathrm{F}$ *alors* P *est un polynôme constant qui ne peut être combinaison linéaire de* X *et* X^2 *que si les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls. Il est aussi clair que tout polynôme de* E *s'écrit comme la somme d'un polynôme constant et d'une combinaison linéaire de* X *et* X^2*. On a donc bien :* $\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$*.*

Exercice 23.33 ♡

On considère dans $\mathrm{E}=\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ *les sous-ensembles* $\mathscr{P}=\left\{\mathrm{P}\in\mathrm{E} \mid \mathrm{P} \text{ est pair}\right\}$ *et* $\mathscr{I}=\left\{\mathrm{P}\in\mathrm{E} \mid \mathrm{P} \text{ est impair}\right\}$*.*

1. *Soit* $\mathrm{P}\in\mathrm{E}$*. Montrer que* $\mathrm{P}\in\mathscr{P}$ *si et seulement si les coefficients de ses termes de degré impair sont nuls.*
2. *Soit* $\mathrm{P}\in\mathrm{E}$*. Montrer que* $\mathrm{P}\in\mathscr{I}$ *si et seulement si les coefficients de ses termes de degré pair sont nuls.*
3. *Montrer que* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{I}$ *sont des sous-espaces vectoriels de* E*.*
4. *Montrer que* $\mathrm{E}=\mathscr{P}\oplus\mathscr{I}$*.*

Solution :

1. *Supposons que* $\mathrm{P}=a_4\mathrm{X}^4+a_3\mathrm{X}^3+a_2\mathrm{X}^2+a_1\mathrm{X}+a_0$ *avec* $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}$*. Si* P *est pair alors* $\mathrm{P}(-\mathrm{X})=\mathrm{P}(\mathrm{X})$ *et* $a_4\mathrm{X}^4+a_3\mathrm{X}^3+a_2\mathrm{X}^2+a_1\mathrm{X}+a_0=a_4\mathrm{X}^4-a_3\mathrm{X}^3+a_2\mathrm{X}^2-a_1\mathrm{X}+a_0$ *donc* $a_3\mathrm{X}^3+a_1\mathrm{X}=0$ *ce qui amène* $a_3=a_1=0$ *car un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls. Les coefficients des termes de degré impair de* P *sont donc bien nuls. Réciproquement, on vérifie facilement que si* $a_3=a_1=0$ *alors* P *est pair.*
2. *Même raisonnement que dans la question précédente.*
3. *On tire des deux premières questions que* $\mathscr{P}=\mathrm{V}ect\left(1,\mathrm{X}^2,\mathrm{X}^4\right)$ *et* $\mathscr{I}=\mathrm{V}ect\left(\mathrm{X},\mathrm{X}^3\right)$*. Ces deux ensembles sont donc des sous-espaces vectoriels de* E*.*
4. *Soit* $\mathrm{P}\in\mathscr{P}\cap\mathscr{I}$*. Alors les coefficients des termes de degré pair et les coefficients des termes de degré impair de* P *sont nuls. Donc* P *est nul et* $\mathscr{P}$*,* $\mathscr{I}$ *sont en somme directe. Si* $\mathrm{P}=a_4\mathrm{X}^4+a_3\mathrm{X}^3+a_2\mathrm{X}^2+a_1\mathrm{X}+a_0\in\mathrm{E}$ *alors*
$$\mathrm{P}=\underbrace{a_4\mathrm{X}^4+a_2\mathrm{X}^2+a_0}_{\in\mathscr{P}}+\underbrace{a_3\mathrm{X}^3+a_1\mathrm{X}}_{\in\mathscr{I}}$$
donc $\mathrm{E}=\mathscr{P}+\mathscr{I}$*. En conclusion,* $\mathrm{E}=\mathscr{P}\oplus\mathscr{I}$*.*

Exercice 23.34 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\mathrm{F} = \left\{f \in \mathrm{E} \mid f(1) = 0\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E} \mid \exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = ax\}$$

Solution : *On vérifie facilement que* F *est sous-espace vectoriel de* E. *On remarque que* $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect\left(\mathrm{id}_{\mathrm{R}}\right)$ *et donc* G *est un sous-espace vectoriel de* E. *Si* $f \in \mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ *alors il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f : x \mapsto ax$. *Mais comme* $f(1) = 0$, *il vient que* $a = 0$ *et donc que* $f = 0$. *L' intersection de* F *et* G *est donc réduite à la fonction identiquement nulle sur* $\mathbb{R}$. *Notons* φ *la fonction constante égale à* 1 *sur* $\mathbb{R}$. *Soit* $f \in \mathrm{E}$. *On a, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $f(x) = f(x) - f(1).\varphi(x) + f(1).\varphi(x)$. *Il est clair que* $f - f(1)\varphi \in \mathrm{F}$ *et que* $f(0)\varphi \in \mathrm{G}$. *On en déduit que* $\mathrm{E} = \mathrm{F}+\mathrm{G}$. *En conclusion, on a bien* $\mathrm{E} = \mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

Exercice 23.35 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\mathrm{F} = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{V}ect\left(x \mapsto 1, \mathrm{id}_{\mathrm{R}}\right)$$

Solution : *Il est clair que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Il est aussi facile de montrer que* $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0\}$. *En effet, si* $f \in \mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ *alors* f *est une fonction affine qui s'annule en* 0 *et dont la dérivée s'annule aussi en* 0. f *est donc nécessairement identiquement nulle. Par ailleurs, si* $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *alors notant :* $g : x \mapsto h'(0)\,x + h(0)$, *on a :*$h - g \in \mathrm{F}$ *ce qui montre que* $\mathrm{E} = \mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

Exercice 23.36 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$

$$\mathrm{F} = \left\{f \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C}) \mid \int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \left\{f \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C}) \mid f \text{ est constante}\right\}$$

Solution : *On montre facilement que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$. *L'intersection* $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ *est réduite au vecteur nul. En effet, si la fonction* $f \in \mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ *alors* f *est une fonction constante égale à un réel* c *d'intégrale nulle sur* $[-1,1]$ *ce qui amène* $2c = 0$, *c'est-à-dire* $c = 0$. f *est donc identiquement nulle. De plus, si* $h \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$, *en posant* $\alpha = \int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ *et en désignant par* g *la fonction constante sur* $[-1,1]$ *égale à* α, *on vérifie facilement que* $h - g \in \mathrm{F}$ *et donc* $\mathrm{E} = \mathrm{F}+\mathrm{G}$. *En résumé :* F *et* G *sont supplémentaires dans* E.

Exercice 23.37 ♡♡

$\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{F} = \left\{f \in \mathrm{E}; f(0) = f(1) = 0\right\}$. *Montrer que* F *est un s.e.v. de* E *et trouver un supplémentaire de* F *dans* E.

Indication 23.23 : Considérer l'ensemble des fonctions telles que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $f(x) = 0$.

Solution : *On montre que la fonction nulle est dans* F, *et que* F *est stable par combinaison linéaire. Soit*

$$\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}; \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq 1, f(x) = 0\}$$

On montre sans problème que G *est un sous-espace vectoriel de* E. *Alors* $\boxed{\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}}$ *(c'est clair). Montrons ensuite que* $\mathrm{E} = \mathrm{F}+\mathrm{G}$ *: soit* $f \in \mathrm{E}$. *Définissons*

$$f_{\mathrm{F}} = \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 1 \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{et } f_{\mathrm{G}} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$$

On a bien, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f_{\mathrm{F}}(x) + f_{\mathrm{G}}(x)$ *et* $f_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$, $f_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$. *Finalement,* $\mathrm{E} = \mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

Exercice 23.38 ♡♡

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ *on considère*

$$\mathrm{H} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{E} \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

Montrer que H *est un sous-espace vectoriel de* E *et trouver un supplémentaire de* H. *Le supplémentaire trouvé est-il unique ?*

Indication 23.23 : Faire un dessin de H *lorsque* $n = 2$ *et* $n = 3$.

Solution : *On montre sans problème que* H *est un sous-espace vectoriel. Considérons* $a = (1,\dots,1) \in \mathrm{R}^n$. *Alors* $a \notin \mathrm{H}$. *Montrons que* $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(a)\oplus\mathrm{H}$.

1. $\boxed{\mathrm{Vect}(a)\cap \mathrm{H} = \{0\}}$: *Soit* $x \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})\cap\mathrm{H}$ *: il existe* $\lambda\in\mathbb{R}$*, tel que* $x = \lambda a = (\lambda,\dots,\lambda)$*. Mais comme* $x\in \mathrm{H}$*,* $n\lambda = 0$ *d'où* $\lambda = 0$ *et* $x = 0$*.*
2. $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(a) + \mathrm{H}}$: *Soit* $x = (x_1,\dots,x_n)\in\mathrm{E}$*. En supposant le problème résolu, il existe* $\lambda\in\mathbb{R}$ *et* $h\in\mathrm{H}$ *tels que* $x = \lambda a + h$*. Alors il faut que* $x-\lambda a = (x_1-\lambda,\dots,x_n-\lambda)\in\mathrm{H}$ *et donc que* $\lambda = \dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$*.*

   Posons donc $\lambda = \dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$ *et* $h = x-\lambda a$*. On vérifie que* $x = \lambda a + h$ *et que* $h\in\mathrm{H}$*,* $\lambda a\in\mathrm{Vect}(a)$*.*

Le supplémentaire trouvé n'est pas unique (cf dessin dans $\mathbb{R}^3$*) : il suffit de prendre un vecteur* $a\notin\mathrm{H}$ *et alors* $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(a)\oplus\mathrm{H}$*.*

Exercice 23.39 ♡♡

Soit E *un K-e.v. et* A,B *deux sous-espaces vectoriels de* E*. Soit* C *un supplémentaire de* $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ *dans* B*. Montrer que* $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{A}\oplus\mathrm{C}$*.*

Solution :

1. *Montrons que la somme* $\mathrm{A}+\mathrm{C}$ *est directe. Soit* $x\in\mathrm{A}\cap\mathrm{C}$*, puisque* $x\in\mathrm{A}$ *et* $x\in\mathrm{B}$ *(car* $\mathrm{C}\subset\mathrm{B}$*),* $x\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ *et* $x\in\mathrm{C}$*. Comme* $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\oplus\mathrm{C} = \mathrm{B}$*, il vient que* $x = 0$*.*
2. *Montrons que* $\mathrm{A}+\mathrm{C} = \mathrm{A}+\mathrm{B}$*. Comme* $\mathrm{C}\subset\mathrm{B}$*, il est immédiat que* $\mathrm{A}+\mathrm{C}\subset\mathrm{A}+\mathrm{B}$*. Montrons donc que* $\mathrm{A}+\mathrm{B}\subset\mathrm{A}+\mathrm{C}$*. Soit* $x\in\mathrm{A}+\mathrm{B}$*. Il existe* $x_{\mathrm{A}}\in\mathrm{A}$ *et* $x_{\mathrm{B}}\in\mathrm{B}$ *tel que* $x = x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}$*. Comme* $\mathrm{B} = (\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{C}$*, il existe* $x_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ *et* $x_{\mathrm{C}}\in\mathrm{C}$ *tel que* $x_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}+x_{\mathrm{C}}$*. Alors*
$$x = (x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}})+x_{\mathrm{C}}$$
   avec $x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}\in\mathrm{A}$ *et* $x_{\mathrm{C}}\in\mathrm{C}$*.*

Exercice 23.40 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ *trois sous-espace vectoriel de* E *vérifiant*
$$\mathrm{E} = \mathrm{A}\oplus\mathrm{B} \text{ et } \mathrm{A}\subset\mathrm{C}$$
Montrer que $\mathrm{C} = \mathrm{A}\oplus(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$*.*

Solution : *Soit* $x\in\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$ *alors* $x\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \{0\}$ *car* A *et* B *sont en somme directe. Donc* $x = 0$ *et les deux sous-espaces vectoriels* A *et* $\mathrm{B}\cap\mathrm{C}$ *sont bien en somme directe. Montrons que* $\mathrm{C} = \mathrm{A}+(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$*. Soit* $x\in\mathrm{C}$*. Comme* $x\in\mathrm{E}$ *et que* $\mathrm{E} = \mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$*, il existe un unique couple* $(x_{\mathrm{A}},x_{\mathrm{B}})\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ *tel que* $x = x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}$*. Comme* $\mathrm{A}\subset\mathrm{C}$*,* $x_{\mathrm{A}}\in\mathrm{C}$ *et comme* C *est un sous-espace vectoriel de* E*,* $x-x_{\mathrm{A}}\in\mathrm{C}$*. Il vient donc* $x_{\mathrm{B}}\in\mathrm{C}$ *ce qui prouve que* $x_{\mathrm{B}}\in\mathrm{B}\cap\mathrm{C}$*. On a alors montré que* $x\in\mathrm{A}+(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$ *et donc* $\mathrm{C} = \mathrm{A}+(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$*. En résumé :* $\mathrm{C} = \mathrm{A}\oplus(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$*.*

Exercice 23.41 ♡♡

On définit dans l'espace E *des suites réelles :*
$$\mathrm{F} = \{(x_n)\in\mathrm{E}\mid \forall n\in\mathbb{N},\quad x_{n+3}-x_{n+2}-x_{n+1}+x_n = 0\}$$
$$\mathrm{G} = \{(x_n)\in\mathrm{E}\mid \forall n\in\mathbb{N},\quad x_{n+1}+x_n = 0\}$$
$$\mathrm{H} = \{(x_n)\in\mathrm{E}\mid \forall n\in\mathbb{N},\quad x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n = 0\}$$
Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{G}\oplus\mathrm{H}$*.*

Solution : *On montre d'abord que* $\mathrm{G}\subset\mathrm{F}$*. Si* $(x_n)\in\mathrm{G}$ *et si* $n\in\mathbb{N}$ *alors* $x_{n+1}+x_n = 0$ *et* $x_{n+3}+x_{n+2} = 0$ *donc* $x_{n+3}-x_{n+2}-x_{n+1}+x_n = -2(x_{n+2}+x_{n+1}) = 0$*. On montre aussi que* $\mathrm{H}\subset\mathrm{F}$*. Soit* $(x_n)\in\mathrm{H}$ *et* $n\in\mathbb{N}$*. Alors* $x_{n+3}-x_{n+2}-x_{n+1}+x_n = x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n = 0$*.*

1. *Montrons que* $\mathrm{G}\cap\mathrm{H} = \{0_{\mathrm{E}}\}$*. Soit* $(x_n)\in\mathrm{G}\cap\mathrm{H}$*. Comme* $(x_n)\in\mathrm{G}$*, on montre que* $\forall n\in\mathbb{N}$*,* $x_n = (-1)^n x_0$*. En écrivant que* $(x_n)\in\mathrm{H}$*, on trouve que* $\forall n\in\mathbb{N}$*,* $(-1)^n x_0[1+2+1] = 0$ *ce qui montre que* $x_0 = 0$ *et par la suite,* $(x_n) = 0_{\mathrm{E}}$*.*
2. *Montrons que* $\mathrm{F} = \mathrm{G}+\mathrm{H}$*. On a déjà prouvé que* $\mathrm{G}\subset\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{H}\subset\mathrm{F}$*. Par conséquent,* $\mathrm{G}+\mathrm{H}\subset\mathrm{F}$*. Il nous faut montrer que* $\mathrm{F}\subset\mathrm{G}+\mathrm{H}$*. Soit* $(x_n)\in\mathrm{F}$*. En effectuant une partie recherche, si* $(x_n) = (u_n)+(v_n)$ *avec* $(u_n)\in\mathrm{G}$ *et* $(v_n)\in\mathrm{H}$*, puisque* $(u_n)\in\mathrm{G}$*, il existe* $\lambda\in\mathbb{R}$ *tel que* $(u_n) = \lambda\big((-1)^n\big)$*. En écrivant que* $(v_n) = (x_n)-(u_n)$*, puisque* $(v_n)\in\mathrm{H}$*, il faut que* $v_2-2v_1+v_0 = 0$ *et par conséquent, on trouve que* $\lambda = \dfrac{x_0-2x_1+x_2}{4}$*.*

   Partie rédaction : *Posons* $\forall n\in\mathbb{N}$*,*
$$u_n = \frac{x_0-2x_1+x_2}{4}(-1)^n$$

$$v_n = x_n - \frac{x_0 - 2x_1 + x_2}{4}(-1)^n$$

On a bien $(u_n)+(v_n)=(x_n)$, *et* $(u_n)\in \mathrm{G}$. *Montrons que* $(v_n)\in\mathrm{H}$. *Soit* $n\in\mathbb{N}$,

$$v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) - (x_0 - 2x_1 + x_2)(-1)^n$$

On montre par récurrence sur n *(car* $(x_n)\in\mathrm{F}$*), que cette quantité est nulle pour tout entier* n.

Exercice 23.42 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et deux sous-espaces vectoriels* A *et* B *de* E. *On suppose qu'il existe un supplémentaire* A' *de* $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ *dans* A *et un supplémentaire* B' *de* $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ *dans* B. *Montrer que*

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = (\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \oplus (\mathrm{A}'+\mathrm{B}')$$

Solution :

1. *La somme est directe : montrons que* $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cap(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')=\{0_\mathrm{E}\}$. *Soit* $x\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cap(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')$. *Comme* $x\in\mathrm{A}'+\mathrm{B}'$, *il existe* $(a',b')\in\mathrm{A}'\times\mathrm{B}'$ *tels que* $x=a'+b'$. *Alors* $b'=x-a'\in\mathrm{A}$ *et donc* $b'\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$. *Puisque la somme* $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}+\mathrm{B}'$ *est directe, il vient que* $b'=0_\mathrm{E}$. *On montre de la même manière que* $a'=0_\mathrm{E}$ *et donc ensuite que* $x=0_\mathrm{E}$.
2. $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')\subset\mathrm{A}+\mathrm{B}$ *est claire. Soit* $x\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')$. *Il existe* $(y,a',b')\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\times\mathrm{A}'\times\mathrm{B}'$ *tels que* $x=(y+a')+b'\in\mathrm{A}+\mathrm{B}$.
3. $\mathrm{A}+\mathrm{B}\subset(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')$. *Soit* $x\in\mathrm{A}+\mathrm{B}$. *Il existe* $(a,b)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ *tels que* $x=a+b$. *Comme* $\mathrm{A}=(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{A}'$, $\exists(y_1,a')\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\times\mathrm{A}'$ *tels que* $a=y_1+a'$. *De même,* $\exists(y_2,b')\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\times\mathrm{B}'$ *tels que* $b=y_2+b'$. *Alors* $x=y_1+a'+y_2+b'=\underbrace{(y_1+y_2)}_{\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}+(\underbrace{a'}_{\in\mathrm{A}'}+\underbrace{b'}_{\in\mathrm{B}'})$ *et donc* $x\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')$.

23.7.6 Applications linéaires

Exercice 23.43 ♡

Vérifier si les applications entre $\mathbb{R}$*-espace vectoriels suivantes sont linéaires ou pas.*

1. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x-y\end{array}\right.$
2. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x+y+1\end{array}\right.$
3. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y)\end{array}\right.$
4. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y,x+z)\end{array}\right.$
5. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & xyz\end{array}\right.$
6. $\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ f & \longmapsto & f(1)\end{array}\right.$
7. $\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R})\\ f & \longmapsto & 2f+f'\end{array}\right.$
8. $\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{C}^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$
9. $\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (u_n) & \longmapsto & (u_0,u_1)\end{array}\right.$
10. $\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}]\\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{X}^2+1)\mathrm{P}\end{array}\right.$

Solution :

1. *Soient* $\alpha,\alpha'\in\mathbb{R}$ *et* $u=(x,y),u'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$. *On a :* $f(\alpha u+\alpha' u')=f(\alpha x+\alpha' x',\alpha y+\alpha' y')=(\alpha x+\alpha' x')-(\alpha y+\alpha' y')=\alpha(x-y)+\alpha'(x'-y')=\alpha f(u)+\alpha' f(u')$. f *est bien linéaire.*
2. $f(0,0)=1$. f *n'est donc pas linéaire.*
3. *Soient* $\alpha,\alpha'\in\mathbb{R}$ *et* $u=(x,y),u'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$. *On a :* $f(\alpha u+\alpha' u')=f(\alpha x+\alpha' x',\alpha y+\alpha' y')=((\alpha x+\alpha' x')+(\alpha y+\alpha' y'),(\alpha x+\alpha' x')-(\alpha y+\alpha' y'))=\alpha(x+y,x-y)+\alpha'(x'+y',x'-y')=\alpha f(u)+\alpha' f(u')$. f *est bien linéaire.*
4. *Par un calcul analogue au précédent, on montre que* f *est linéaire.*
5. *Soient* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *On a :* $f(2(x,y,z))=f(2x,2y,2z)=2^3xyz\neq 2f(x,y,z)$. f *n'est donc pas linéaire.*
6. *Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *et* $f,g\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *On a :* $\theta(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)(1)=\alpha f(1)+\beta g(1)=\alpha\theta(f)+\beta\theta(g)$. θ *est bien linéaire.*
7. *Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *et* $f,g\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. *On a, par linéarité de la dérivation :* $\theta(\alpha f+\beta g)=2(\alpha f+\beta g)+(\alpha f+\beta g)'=\alpha(2f+f')+\beta(2g+g')=\alpha\theta(f)+\beta\theta(g)$. θ *est bien linéaire.*

8. *Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *et* $f,g\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. *On a, par linéarité de l'intégrale :* $\theta(\alpha f+\beta g)=\int_0^1(\alpha f+\beta g)(t)\,\mathrm{d}t=\alpha\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t=\alpha\theta(f)+\beta\theta(g)$. θ *est bien linéaire.*
9. *Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *et* $u,v\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$. *On a :* $\theta(\alpha u+\beta v)=(\alpha u_0+\beta v_0,\alpha u_1+\beta v_1)=\alpha(u_0,u_1)+\beta(v_0,v_1)=\alpha\theta(u)+\beta\theta(v)$. θ *est bien linéaire.*
10. *Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *et* $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. *On a :* $\theta(\alpha P+\beta Q)=(X^2+1)(\alpha P+\beta Q)=\alpha(X^2+1)P+\beta(X^2+1)Q=\alpha\theta(P)+\beta\theta(Q)$. θ *est bien linéaire.*

Exercice 23.44 ♡

On considère

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right)\end{array}\right.$$

1. *Montrer que* f *est un automorphisme de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Déterminer son automorphisme réciproque.*
3. *Interpréter géométriquement* f.

Solution :

1. *On vérifie facilement que* f *est linéaire. Montrons que* f *est bijective : Soit* $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$. *Il suffit de montrer qu'il existe un et un seul couple* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x,y)=(X,Y)$. *Cela revient à résoudre le système :* $\left\{\begin{array}{l}\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)=X\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)=Y\end{array}\right.$. *On trouve* $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$ *et* $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$ *et* f *est bien bijective. En résumé,* f *est un automorphisme de* $\mathbb{R}^2$.
2. *En utilisant les calculs de la question précédente, on a :* $f^{-1}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (X,Y) & \longmapsto & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y),-\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\right)\end{array}\right.$.
3. *Remarquons que :* $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & \left(\cos\frac{\pi}{4}x-\sin\frac{\pi}{4}y,\cos\frac{\pi}{4}x+\sin\frac{\pi}{4}y\right)\end{array}\right.$. f *est donc la rotation vectorielle d'angle* $\frac{\pi}{4}$. *On reconnaît par ailleurs que* f^{-1} *est celle d'angle* $-\frac{\pi}{4}$, *ce qui est cohérent.*

23.7.7 Image et noyau d'un endomorphisme

Exercice 23.45 ♡

Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,0,y,0,z,0)\end{array}\right.$

1. *Prouver que* f *est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau de* f.
3. *Déterminer l'image de* f.

Solution :

1. *Facile.*
2. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *On a :* $(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f\iff f(x,y,z)=0\iff(x,0,y,0,z,0)=(0,0,0,0,0,0)\iff(x,y,z)=(0,0,0)$ *donc* $\operatorname{Ker} f=\{(0,0,0)\}$ *et* f *est injective.*
3. $\operatorname{Im} f=\{f(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=\{(x,0,y,0,z,0)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}$.

Exercice 23.46 ♡

Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y,x+y)\end{array}\right.$

1. *Prouver que* f *est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de* f.

Solution :

1. *On vérifie facilement que* f *est linéaire.*

2. *Montrons que f est bijective. On en déduira que* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ *et que* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. *Soit* $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. *Il suffit de montrer qu'il existe un et seul couple* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x,y) = (X,Y)$. *Pour ce faire, résolvons :* $\begin{cases} 2x - y = X \\ x + y = Y \end{cases}$. *L'unique solution est* $\left(x = \dfrac{X+Y}{3}, y = \dfrac{2Y-X}{3}\right)$ *et f est donc bien bijective.*

Exercice 23.47 ♡

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y+2z) \end{cases}$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Solution : *On a* $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} u \iff \begin{cases} x+y-z & = 0 \\ x-y+2z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z & = -2x \\ y & = -3x \end{cases}$ *donc* $\operatorname{Ker} u = \mathrm{V}ect(1,-3,-2)$. *$u$ n'est donc pas injective. Par ailleurs,* $\operatorname{Im} u = \{(x+y-z, x-y+2z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1,1) + y(1,-1) + z(-1,2) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{V}ect((1,1),(1,-1),(-1,2)) = \mathbb{R}^2$ *car les vecteurs* $(1,1),(1,-1)$ *sont non colinéaires et ils engendrent donc le plan. u est donc surjective.*

Exercice 23.48 ♡♡

Soit $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{cases}$.

1. *Prouver que* $\theta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.
2. *Montrer que θ est injective.*
3. *Montrer que θ est surjective.*

Indication 23.23 : Un polynôme de degré $n \geqslant 0$ admet au plus n racines.

Solution :

1. *On vérifie facilement que θ est linéaire.*
2. *Montrons que θ est injective. Soit* $P \in \operatorname{Ker}\theta$. *On a donc à la fois :* $\deg P \leqslant 2$ *et* $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. *Le polynôme P est donc un polynôme de degré $\leqslant 2$ qui admet au moins 3 racines. Ceci n'est possible que si $P = 0$. Donc* $\operatorname{Ker}\theta = \{0\}$ *et θ est injective.*
3. *Avec les outils du chapitre « Dimension d'un espace vectoriel », il sera très facile de montrer que θ est surjective grâce à la formule du rang et à un raisonnement sur les dimensions des espaces ici considérés. En attendant de connaître ces résultats, il faut procéder à la main : soit* $(s,t,u) \in \mathbb{R}^3$. *On cherche un polynôme* $P = aX^2 + bX + c$ *tel que* $(P(0), P(1), P(2)) = (s,t,u)$. *Ceci amène le système :* $\begin{cases} c = s \\ a+b+c = t \\ 4a+2b+c = u \end{cases}$ *qui admet comme unique solution :* $(s/2 - t + u/2, -3/2s + 2t - u/2, s)$. *L'application θ est donc surjective. En résumé, θ est un isomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23.49 ♡

Soit $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \theta(P) = P(X+1) - P(X) \end{cases}$.

1. *Prouver que θ est linéaire.*
2. *θ est-elle bijective ?*

Solution :

1. *On vérifie facilement que θ est linéaire.*
2. *L'image d'un polynôme constant par θ est un polynôme nul. Par suite, le noyau de θ ne contient pas que le vecteur nul et donc θ n'est pas injective.*

Exercice 23.50 ♡

Soit $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$

1. *Prouver que θ est linéaire.*
2. *Calculer le noyau de θ.*
3. *Calculer l'image de θ.*

Solution : *On montre facilement que θ est linéaire, que $\operatorname{Ker}\theta$ est le sous ensemble des polynômes constants de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\operatorname{Im}\theta$ est donné par $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.*

Exercice 23.51 ♡

Soit

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

1. *Prouver que θ est une forme linéaire.*
2. *θ est-elle injective ?*
3. *Démontrer que θ est surjective.*

Solution :

1. *On montre facilement que θ est linéaire. Comme θ est à valeur dans $\mathbb{R}$, c'est une forme linéaire.*
2. *On a : $\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\mathrm{id}_{[-1,1]} \in \operatorname{Ker}\theta$. θ n'est donc par injective.*
3. *Montrons que θ est surjective : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe $f \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha$. Il suffit de considérer par exemple la fonction constante $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha}{2} \end{array} \right.$. On a bien $\theta(f) = \alpha$. θ est donc surjective.*

Exercice 23.52 ♡

Soit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' - 2f' + f \end{array} \right.$$

1. *Prouver que φ est un endomorphisme.*
2. *Calculer $\operatorname{Ker}\varphi$.*
3. *φ est-elle injective ?*

Solution :

1. *Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Utilisant la linéarité de la dérivation : $\varphi(\alpha + \beta g) = (\alpha + \beta g)'' - 2(\alpha + \beta g)' + (\alpha + \beta g) = \alpha(f'' - 2f' + f) + \beta(g'' - 2g' + g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$. φ est bien linéaire.*
2. *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $f \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f'' - 2f' + f = 0$. En appliquant le théorème de résolution des équations différentielles linéaires du second degré à coefficients constants, on obtient : $\operatorname{Ker} f = \mathrm{V}ect\left(t \mapsto te^t, t \mapsto e^t\right)$.*
3. *Il est alors clair que φ n'est pas injective.*

Exercice 23.53 ♡

Soient X un ensemble non vide et $a \in X$. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(X,E) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array} \right.$$

1. *Prouver que θ est une application linéaire.*
2. *Déterminer l'image de θ_a et dire si θ est surjective.*
3. *Déterminer le noyau de θ_a et dire si θ est injective.*

Solution :

1. *On montre facilement que θ est linéaire.*
2. *Soit $v \in E$. On veut montrer qu'il existe une application $f \in \mathscr{F}(X,E)$ tel que : $f(a) = v$. Il suffit de considérer l'application constante $f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u \end{array} \right.$. θ est donc surjective.*
3. *Il est clair que $\operatorname{Ker}\theta_a = \left\{f \in \mathscr{F}(X,E) \mid f(a) = 0\right\}$. L'application θ n'est donc pas injective.*

Exercice 23.54 ♡♡

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & (1+ia)z + (1-ia)\bar{z} \end{cases}$$

1. *Montrer que f est linéaire.*
2. *Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et le représenter dans le plan complexe (on prendra $a = 1$).*
3. *Déterminer $\operatorname{Im} f$ et le représenter dans le plan complexe (lorsque $a = 1$).*
4. *Lorsque $a = 1$, trouver les antécédents de 1 par f et représenter l' ensemble $f^{(-1)}(\{1\})$.*

Solution :

1. *On vérifie sans peine que f est linéaire.*
2. *Soit $z \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(z) = 0$. En notant $u = 1 + ia$ et en remarquant que $f(z) = (uz) + \overline{(uz)} = 2\operatorname{Re}(uz)$, on obtient que $\operatorname{Re}(uz) = 0$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $uz = i\lambda$, et donc $z = \dfrac{i\lambda}{u} = \lambda\left(\dfrac{a}{1+a^2} + \dfrac{i}{1+a^2}\right)$. On vérifie que réciproquement, tout complexe de cette forme est dans $\operatorname{Ker} f$. Par conséquent,*

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(a+i)}$$

3. *Soit $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}$. Cherchons $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \mathrm{Z}$. Puisque $\mathrm{Z} = 2\operatorname{Re}(uz)$, il faut nécessairement que $\mathrm{Z} \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si $\mathrm{Z} \in \mathbb{R}$, alors $f(\mathrm{Z}/(2u)) = \operatorname{Re}(2u\mathrm{Z}/(2u)) = \mathrm{Z}$. Par conséquent, $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}}$.*
4. *Lorsque $\mathrm{Z} = 1$ et $a = 1$, on trouve que $z = \dfrac{1}{2(1+i)} + \dfrac{i\lambda}{2(1+i)} = \dfrac{(1-i)}{4} + \lambda\dfrac{1+i}{4}$. C'est une droite affine passant par le point $\dfrac{1-i}{4}$ et parallèle à la droite vectorielle $\operatorname{Ker} f$.*

Exercice 23.55 ♡♡

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On définit

$$\varphi: \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{cases} \quad \text{où } \varphi(f): \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

1. *Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$.*
2. *Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.*

Solution : *En utilisant les équivalents usuels (ou plus simplement en écrivant le taux d'accroissement de sh en 0), on montre que $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. La fonction $\varphi(f)$ est donc continue en 0 et donc $\varphi(f) \in \mathrm{E}$.*
Cherchons $\operatorname{Ker}\varphi$: Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\forall x \neq 0$, $\varphi(f)(x) = 0$ et donc $\forall x \neq 0$, $f(x) = 0$ et comme f est continue en 0, il vient également que $f(0) = 0$. Par conséquent, $f = 0_{\mathrm{E}}$. Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
Montrons que $\operatorname{Im}\varphi = \mathrm{E}$. Soit $g \in \mathrm{E}$. Définissons

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sh} x} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

On vérifie que f est continue en 0, donc que $f \in \mathrm{E}$ et que $\varphi(f) = g$. Par conséquent, $\operatorname{Im}\varphi = \mathrm{E}$.
Donc $\boxed{\varphi \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})}$.

Exercice 23.56 ♡

Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathrm{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Montrer que :

1. $\operatorname{Ker}(gof) = f^{(-1)}(\operatorname{Ker} g)$
2. $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$
3. $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$

Solution :

1. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$ *alors comme* $g\big(f(x)\big) = 0$, $f(x) \in \operatorname{Ker} g$ *et donc* $x \in f^{-1}\big(\operatorname{Ker} g\big)$. *Réciproquement, si* $x \in f^{-1}\big(\operatorname{Ker} g\big)$ *alors* $f(x) \in \operatorname{Ker} g$ *et* $g\big(f(x)\big) = 0$ *ce qui s'écrit aussi* $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$.
2. *Si* $x \in \operatorname{Ker} f$ *alors* $f(x) = 0$ *et donc* $g\big(f(x)\big) = g(0) = 0$. *Alors* $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$.
3. *Si* $y \in \operatorname{Im} g \circ f$ *alors il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $g\big(f(x)\big) = y$. *Il est alors clair que* $y \in \operatorname{Im} g$ *(un antécédent de* y *par* g *est* $f(x)$*).*

Exercice 23.57 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathrm{L(E)}$ *un endomorphisme. On pose*

$$\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = x\}$$

1. *Montrer que* P *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Montrer que la somme* $\operatorname{Ker} u + \mathrm{P}$ *est directe.*

Solution :

1. *Il suffit de remarquer que* $\mathrm{P} = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$ *et on obtient immédiatement que* P *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Montrons que* $\mathrm{P} \cap \operatorname{Ker} u = \{0_\mathrm{E}\}$. *Soit* $x \in \mathrm{P} \cap \operatorname{Ker} u$, *on a* $u(x) = x$ *et* $u(x) = 0$ *d'où* $x = 0$.

Exercice 23.58 ♡

Soient f *et* g *deux endomorphismes d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.

1. *Montrer que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \iff gof = 0$.
2. *Montrer que* $fog = gof \implies \operatorname{Ker} g$ est stable par f.
3. *Montrer que* $gof = \mathrm{id} \implies f$ *injective.*

Solution :

1. *Si* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ *alors pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $f(x) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ *donc* $g\big(f(x)\big) = 0$. *Donc* $gof = 0$. *Réciproquement, si* $g \circ f = 0$ *et si* $y \in \operatorname{Im} f$ *alors il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $y = f(x)$ *et* $g\big(y\big) = g\big(f(x)\big) = 0$ *donc* $y \in \operatorname{Ker} f$. *On a alors bien* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
2. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} g$. *Alors* $g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = f(0) = 0$ *donc* $f(x) \in \operatorname{Ker} g$ *et* $\operatorname{Ker} g$ est stable par f.
3. *Si* $gof = \mathrm{id}$ *et si* $x \in \operatorname{Ker} f$ *alors* $0 = g(0) = g \circ f(x) = \mathrm{id}(x) = x$. *Donc* $x = 0$ *et* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. *On en déduit que* f *est injective.*

Exercice 23.59 ♡♡

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *Montrer que pour toute partie* A *de* E, $f(\operatorname{Vect}(\mathrm{A})) = \operatorname{Vect}\big(f(\mathrm{A})\big)$.

Solution : *Effectuons un raisonnement par double inclusion :*

– $\boxed{\supset}$ $\operatorname{Vect}(\mathrm{A})$ *est un sous-espace vectoriel de* E *qui contient* A. $f(\operatorname{Vect}(\mathrm{A}))$ *est donc un sous-espace vectoriel de* F *qui contient* $f(\mathrm{A})$ *car l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Comme* $\operatorname{Vect}\big(f(\mathrm{A})\big)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* F *contenant* $f(\mathrm{A})$, *on a nécessairement* $f(\operatorname{Vect}(\mathrm{A})) \supset \operatorname{Vect}\big(f(\mathrm{A})\big)$

– $\boxed{\subset}$ *Soit* $y \in f(\operatorname{Vect}(\mathrm{A}))$. *Il existe* $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ *une famille de vecteurs de* A *et* $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ *une famille de scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que* $y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$. *Par linéarité, on a :*$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. *Donc* y *est élément de* $\operatorname{Vect}\big(f(\mathrm{A})\big)$.

Exercice 23.60 ♡♡

On considère trois K*-espaces vectoriels* E,F,G *et deux applications* $\mathrm{E} \xrightarrow{u} \mathrm{F} \xrightarrow{v} \mathrm{G}$ *telles que :*

1. *l'application* u *est linéaire et surjective ;*
2. *l'application* vou *est linéaire de* E *vers* G.

Montrer que l'application v *est linéaire.*

Solution : *Montrons que* v *est linéaire. Soit* $(y_1, y_2) \in \mathrm{F}^2$ *et* $(\lambda, \mu) \in \mathrm{K}^2$. *Puisque* u *est surjective, il existe* $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}^2$ *tels que* $y_1 = u(x_1)$ *et* $y_2 = u(x_2)$. *Alors* $v\big(\lambda y_1 + \mu y_2\big) = v\big(\lambda u(x_1) + \mu u(x_2)\big) = v\big(u(\lambda x_1 + \mu x_2)\big)$ *(car* u *est linéaire)* $= \lambda v \circ u(x_1) + \mu v \circ u(x_2)$ *(car* $v \circ u$ *est linéaire)* $= \lambda v(y_1) + \mu v(y_2)$.

Exercice 23.61 ♡♡

Soient trois $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* E, F, G *et deux applications linéaires* $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$. *Montrer que :*

1. $\operatorname{Ker}(g o f) = \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$;
2. $\operatorname{Im}(g o f) = \operatorname{Im} g \iff \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$.

Solution :

1. (a) $(i) \implies (ii)$: *Soit* $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$, *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$. *Comme* $y \in \operatorname{Ker} g$, $g \circ f(x) = 0$ *et donc* $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. *Donc* $x \in \operatorname{Ker} f$ *et par conséquent,* $f(x) = y = 0$;

   (b) $(ii) \implies (i)$: *On a toujours* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$ *(le vérifier !). Montrons ici que* $\operatorname{Ker} g \circ f \subset \operatorname{Ker} f$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$. *Alors* $g\big(f(x)\big) = 0$. *Mais en posant* $y = f(x)$, $y \in \operatorname{Im} f$ *et* $y \in \operatorname{Ker} g$ *et d'après* (ii), $y = 0$. *Donc* $f(x) = 0$ *ce qui montre que* $x \in \operatorname{Ker} f$.

2. (a) $(i) \implies (ii)$: *Soit* $y \in F$. *Posons* $z = g(y) \in \operatorname{Im} g$. *Comme* $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g \circ f$, *il existe* $x \in E$ *tel que* $z = g \circ f(x)$. *On écrit alors*

$$y = \big(y - f(x)\big) + f(x)$$

   avec $f(x) \in \operatorname{Im} f$ *et puisque* $g\big(y - f(x)\big) = g(y) - g \circ f(x) = 0$, $\big(y - f(x)\big) \in \operatorname{Ker} g$;

   (b) $(ii) \implies (i)$: *On a toujours* $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$ *(le vérifier !). Montrons donc que* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} g \circ f$. *Soit* $z \in \operatorname{Im} g$. *Il existe* $y \in F$ *tel que* $z = g(y)$. *Mais puisque* $F = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f$, *il existe* $(y_1, y_2) \in \operatorname{Ker} g \times \operatorname{Im} f$ *tels que* $y = y_1 + y_2$. *Comme* $y_2 \in \operatorname{Im} f$, *il existe* $x_2 \in E$ *tel que* $y_2 = f(x_2)$. *Alors* $z = g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2) = g \circ f(x_2) \in \operatorname{Im} g \circ f$.

Exercice 23.62 ♡♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* u *un endomorphisme de* E.

1. *On suppose dans cette question que* $u^2 = 0$.
   (a) *Montrer que* $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
   (b) *Montrer que* $\mathrm{id}_E + u$ *est un automorphisme de* E.
2. (a) *Montrer que :* $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\} \iff \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.
   (b) *Montrer que :* $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E \iff \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$.

Solution :

1. (a) *Soit* $y \in \operatorname{Im} u \cdot$ *Il existe donc* $x \in U$ *tel que* $u(x) = y$. *Par conséquent :* $u\big(y\big) = u \circ u(x) = 0$. *Donc* $y \in \operatorname{Ker} u$.

   (b) *On a* $(\mathrm{id} + u) \circ (\mathrm{id} - u) = (\mathrm{id} - u) \circ (\mathrm{id} + u) = \mathrm{id}$ *donc* $\mathrm{id} + u$ *est bijective d'inverse* $\mathrm{id} - u$. $\mathrm{id} + u$ *est donc un automorphisme de* E.

2. (a)
   – $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$. *Si* $x \in \operatorname{Ker} u$ *alors naturellement* $x \in \operatorname{Ker} u^2$. *Réciproquement, si* $x \in \operatorname{Ker} u^2$ *alors* $u(x) \in \operatorname{Im} u$ *et* $u(u(x)) = 0$. *Donc, par application de l'hypothèse* $u(x) = 0$, *donc* $x \in \operatorname{Ker} u$.
   – $\boxed{\Leftarrow}$ *Si on a :* $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ *et si* $y \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $y = u(x)$ *et* $u\big(y\big) = u(u(x)) = 0$. *Donc* $x \in \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ *et* $y = \imath(x) = 0$.

   (b)
   – $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E$. *Soit* $y \in \operatorname{Im} u$. *Alors il existe* $x \in E$ *tel que* $u(x) = y$. *Appliquant l'hypothèse, il existe* $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Im} u$ *tel que* $x = x_1 + x_2$. *On a alors* $y = u(x) = u(x_2)$. *Comme* $x_2 \in \operatorname{Im} u$, *on a :* $y \in \operatorname{Im} u^2$. *Réciproquement, si* $y \in \operatorname{Im} u^2$ *alors évidemment,* $y \in \operatorname{Im} u$.
   – $\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons maintenant que :* $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$. *Si* $y \in E$ *il existe* $x \in E$ *tel que* $u\big(y\big) = u(u(x))$. *Comme* $u\big(y - u(x)\big) = u\big(y\big) - u^2(x) = u\big(y\big) - u\big(y\big) = 0$, $y - u(x) \in \operatorname{Ker} u$ *et on peut décomposer* y *en la somme d'un vecteur de* $\operatorname{Ker} u$ *et d'un vecteur de* $\operatorname{Im} u$ *:* $y = y - u(x) + u(x)$. *Donc* $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E$.

Exercice 23.63 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$ *espace vectoriel* E *et deux endomorphismes* $(u, v) \in L(E)$ *qui commutent :*

$$u \circ v = v \circ u$$

1. *Montrer que* $\operatorname{Im} u$ *et* $\operatorname{Ker} u$ *sont stables par* v, *c'est à dire*

$$v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u \text{ et } v(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u$$

2. *Si l'on suppose de plus que* $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} v$, *montrer que*

$$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v \text{ et } \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

Solution :

1. *Montrons que* $\operatorname{Ker} u$ *est stable par* v. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} u$, *montrons que* $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. *Pour cela, on calcule*

$$u\big(v(x)\big) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v\big(u(x)\big) = v(0_E) = 0_E$$

   Donc on a bien $v(x) \in \operatorname{Ker} u$.
   Montrons que $\operatorname{Im} u$ *est stable par* v. *Soit* $y \in \operatorname{Im} u$. *Montrons que* $v(y) \in \operatorname{Im} u$.
   Comme $y \in \operatorname{Im} u$, $\exists x \in E$ *tel que* $y = u(x)$. *Alors*

$$v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$$

2. *Montrons que* $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$ *: Soit* $y \in \operatorname{Im} u$ *;* $\exists x \in E$ *tel que* $y = u(x)$. *Comme* $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$, $\exists (x_u, x_v) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker} v$ *tel que*

$$x = x_u + x_v$$

   Mais alors

$$v(y) = v\big(u(x_u + x_v)\big) = v\big(u(x_v)\big) = v \circ u(x_v) = u \circ v(x_v) = u(0_E) = 0_E$$

   et donc $y \in \operatorname{Ker} v$.
   L'autre inclusion se prouve de la même façon.

Exercice 23.64 ♡♡♡

Soit un K-espace vectoriel E *et un endomorphisme* $u \in L(E)$ *tel que* $\forall x \in E$, *le système de vecteurs* $(x, u(x))$ *est lié. Montrer que l'application* u *est une homothétie.*

Solution : *Par hypothèse, pour tout* $x \in E$, *il existe* $\lambda(x) \in K$ *tel que* $u(x) = \lambda(x).x$. *Il faut montrer que l'application* $\lambda : E \longrightarrow K$ *est constante. Soient deux vecteurs non nuls* $(x, y) \in E^2$. *Nous allons montrer que* $\lambda(x) = \lambda(y)$. *Comme l'application* u *est linéaire, on a* $u(x+y) = u(x) + u(y)$ *et donc* $\lambda(x+y).(x+y) = \lambda(x).x + \lambda(y).y$. *Donc*

$$\big(\lambda(x+y) - \lambda(x)\big).x + \big(\lambda(x+y) - \lambda(y)\big).y = 0_E \tag{23.1}$$

Étudions deux cas :

– *Si le système* (x, y) *est libre, on tire de la relation (23.1), que* $\lambda(x) = \lambda(x+y) = \lambda(y)$.
– *Si le système* (x, y) *est lié, l'un des vecteurs est combinaison linéaire de l'autre. Si par exemple, il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ *tel que* $y = \alpha.x$, *comme que* u *est linéaire,* $u(y) = u(\alpha.x) = \alpha.u(x)$ *et donc*

$$\lambda(y).y = \big(\alpha \times \lambda(x)\big).x$$

  d'où puisque $y = \alpha.x$,

$$\big(\alpha \times (\lambda(y) - \lambda(x))\big).x = 0_E$$

  et comme $x \neq 0_E$, *et* $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, *on obtient également dans ce cas que* $\lambda(x) = \lambda(y)$.

On a donc montré que la fonction λ *était constante sur* $E \setminus \{0_E\}$ *: il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $\lambda(x) = \lambda$. *On peut poser* $\lambda(0_E) = \lambda$ *également et donc* $u = \lambda.\mathrm{id}_E$. *Par conséquent, l'endomorphisme* u *est une homothétie vectorielle.*

Exercice 23.65 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $f \in L(E)$ *un endomorphisme. On définit*

$$\varphi_f : \begin{cases} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ u & \longrightarrow & f \circ u - u \circ f \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\varphi_f \in L(L(E))$.
2. *Montrer que si* f *est nilpotent, alors* φ_f *est aussi nilpotent.*

Solution :

1. *Soient* $u, v \in L(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. $\varphi_f\big(\alpha u + \beta v\big) = f \circ \big(\alpha u + \beta v\big) - \big(\alpha u + \beta v\big) \circ f = \alpha\big(f \circ u - u \circ f\big) + \beta\big(f \circ v - v \circ f\big) = \alpha\varphi_f(u) + \beta\varphi_f(v)$ *par linéarité de* f. *Donc* φ_f *est linéaire.*
2. *Soit* $u \in L(E)$. *On a* $\varphi_f^2(u) = \varphi_f\big(f \circ u - u \circ f\big) = f^2 \circ u - 2f \circ u \circ f + u \circ f^2$, *puis* $\varphi_f^3(u) = f^3 \circ u - 2f^2 \circ u \circ f + f \circ u \circ f^2 - f^2 \circ u \circ f + 2f \circ u \circ f^2 - u \circ f^3 = f^3 \circ u - 3f^2 \circ u \circ f + 3f \circ u \circ f^2 - u \circ f^3$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Supposons que*

$\varphi_f^n(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k} u f^k$. *Montrons que la formule est encore valable au rang* $n+1$. *On a (pour simplifier les calculs, on n'écrit pas les symboles de composition* $\circ$*) :*

$$\begin{aligned}
\varphi_f^{n+1}(u) &= \varphi_f\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f^{n-k} u f^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left(f^{n-k+1} u f^k - f^{n-k} u f^{k+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f^{n-k+1} u f^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f^{n-k} u f^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f^{n-k+1} u f^k - \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}(-1)^{k-1} f^{n-k+1} u f^k\\
&= f^{n+1} u + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) f^{n+1-k} u f^k + (-1)^{n+1} u f^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k f^{n+1-k} u f^k
\end{aligned}$$

d'après la relation de Pascal. La formule est donc vraie au rang $n+1$. *On termine en appliquant le théorème de récurrence.*
Si p *est l'indice de nilpotence de* f*, alors en posant* $n = 2p$*, et en considérant* $k \in [\![0, n]\!]$*, soit* $k \geqslant p$ *soit* $n-k \geqslant p$. *Donc dans tous les cas,* $f^{n-k} u f^k = 0$ *et comme* $\varphi_f^n(u) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f^{n-k} u f^k$*, il vient, pour tout* $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ *que* $\varphi_f^n(u) = 0$ *et* φ_f *est bien nilpotent..*

Exercice 23.66 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $g \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. *On définit :*

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{L}(\mathrm{E}) \\ f & \longmapsto & g o f \end{array}\right.$$

On admettra que dans un espace vectoriel, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

1. *Montrer que* φ *est linéaire*
2. *Montrer que* φ *est injective si et seulement si* g *est injective*
3. *Montrer que* φ *est bijective si et seulement si* g *est bijective.*

Solution :

1. *Facile.*
2. $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* φ *soit injective. Soit* $x_0 \in \mathrm{E}$ *tel que* $g(x_0) = 0$. *Par l'absurde, supposons que* $x_0 \neq 0$. *Posons* $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(x_0)$ *et considérons un supplémentaire* G *de* F *dans* E. *Considérons aussi l'application linéaire* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ *donnée par*
$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = \alpha x_0 + x_{\mathrm{G}} & \longmapsto & \alpha x_0 \end{array}\right. .$$
Alors $\varphi(f) = g \circ f = 0 = \varphi(0)$. *Comme* φ *est injective, il vient que* $f = 0$ *ce qui n'est pas possible. Donc* $x_0 = 0$ *et* g *est injective.*
$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* g *est injective et s'il existe* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ *telle que* $\varphi(f) = 0$ *alors pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $g \circ f(x) = 0$ *et donc pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $f(x) \in \operatorname{Ker} g = \{0\}$. *Il vient alors que* $\forall x \in \mathrm{E}$, $f(x) = 0$ *autrement dit que* $f = 0$. *En conclusion* φ *est injective..*
3. $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* φ *est surjective. Soit* $y \in \mathrm{E}$. *Il existe* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $\varphi(f) = \mathrm{id}$. *Donc* $g(f(y)) = y$ *et* $y \in \operatorname{Im} g$. *On a prouvé que* g *est surjective.*
$\boxed{\Leftarrow}$ *Si* g *est bijective, montrons qu'il en est de même de* φ. *On sait déjà que* φ *est injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective. Soit* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. *Comme* g *est bijective, pour tout* $x \in \mathrm{E}$*, il existe un unique* $x_f \in \mathrm{E}$ *tel que* $g(x_f) = f(x)$. *On définit ainsi une application* $f_0 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x_f \end{array}\right.$ *. Cette application est linéaire. En effet, si*

$x, x' \in \mathrm{E}$ *et* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ *alors* $f_0(\alpha x + \alpha' x') = (\alpha x + \alpha' x')_f$ *avec* $(\alpha x + \alpha' x')_f$ *tel que*

$$\begin{aligned} g\left((\alpha x + \alpha' x')_f\right) &= f(\alpha x + \alpha' x') \text{ par définition de } (\alpha x + \alpha' x')_f \\ &= \alpha f(x) + \alpha' f(x') \text{ par linéarité de } f \\ &= \alpha g(x_f) + \alpha' g(x') \text{ par définition de } x_f \text{ et } x'_f \\ &= g\left(\alpha x_f + \alpha' x'_f\right) \text{ par linéarité de } g \end{aligned}$$

donc par injectivité de g, $(\alpha x + \alpha' x')_f = \alpha x_f + \alpha' x'_f$ *et* $f_0(\alpha x + \alpha' x') = \alpha f_0(x) + \beta f_0(x')$. *On en déduit que* $f_0 \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. *De plus, par construction,* $g \circ f_0 = f$ *et* φ *est bien surjective.*

Exercice 23.67 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *On pose* $\mathrm{G} = \mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$. *Soit* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ *tel que*

$$\forall x \in \mathrm{G}, f(x) = 2x$$

Montrer que $f = 2\,\mathrm{id}$.

Solution : *Soient* $x \in \mathrm{F}$ *et* $x' \in \mathrm{G}$. *Alors* $x + x' \in \mathrm{G}$ *car sinon,* $x + x' \in \mathrm{F}$ *et comme* $x \in \mathrm{F}$ *et que* F *est un sous-espace vectoriel de* E, $x' \in \mathrm{F}$ *ce qui n'est pas possible.*
Par linéarité de f, $f(x + x') = f(x) + f(x')$ *et donc* $2(x + x') = f(x) + 2x'$. *On en déduit que* $f(x) = 2x$ *et donc que* $f_{|\mathrm{F}} = 2\,\mathrm{id}$. *En conclusion,* $f = 2\,\mathrm{id}$.

Exercice 23.68 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^p \implies \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^n$ *pour* $n \in [\![1, p]\!]$.
2. *Montrer que* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^p \implies \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^n$ *pour* $n \in [\![1, p]\!]$.

Solution :

1. *On vérifie facilement que* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} f^p$. *Donc si* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^p$ *les inclusions précédentes deviennent des égalités.*
2. *De même, il est clair que* $\operatorname{Im} f^p \subset \operatorname{Im} f^{p-1} \subset \ldots \subset \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ *donc si* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^p$, *ces inclusions deviennent là aussi des égalités.*

Exercice 23.69 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$.

1. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \implies \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^n$ *pour* $n \geqslant 2$.
2. *Montrer que* $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1} \implies \operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^p$ *pour* $n \geqslant p$.

Solution :

1. *On effectue un raisonnement par récurrence. La propriété est, par hypothèse, vraie au rang* 2. *Supposons qu'elle est vraie au rang* n *pour* $n \geqslant 2$ *et prouvons là au rang* $n+1$. *On sait déjà que* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$. *Si* $x \in \operatorname{Ker} f^{n+1}$ *alors* $f^n(f(x)) = 0$ *et donc* $f(x) \in \operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f$. *Donc* $f^2(x) = 0$ *et* $x \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. *La propriété est alors aussi vraie au rang* $n+1$. *On termine en appliquant le théorème de récurrence.*
2. *Montrons par une récurrence sur* $n \geqslant p+1$ *que* $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^p$. *La propriété est vraie par hypothèse au rang* $p+1$. *Soit* $n \geqslant p+1$. *Supposons que* $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^p$ *et montrons que* $\operatorname{Im} f^{n+1} = \operatorname{Im} f^p$. *On a toujours* $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^p$. *Si* $y \in \operatorname{Im} f^p$ *alors il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $y = f^p(x)$. *Comme* $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$, *il existe* $x' \in \mathrm{E}$ *tel que* $y = f^p(x) = f^{p+1}(x')$. *Mais d'après l'hypothèse de récurrence , il existe* $x'' \in \mathrm{E}$ *tel que* $f^n(x'') = f^p(x'')$. *Donc* $y = f(f^n(x)) = f^{n+1}(x'')$ *et donc* $\operatorname{Im} f^p \subset \operatorname{Im} f^{n+1}$. *On termine en appliquant le théorème de récurrence.*

Exercice 23.70 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. *On pose*

$$\mathrm{N} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} f^i$$

1. *Montrer que* $\mathrm{N} = \operatorname{Ker} f \implies \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ *est directe.*
2. *Etudier la réciproque.*

Solution :

1. *Supposons que* $N = \operatorname{Ker} f$. *Alors pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Ker} f^i \subset \operatorname{Ker} f$. *Comme par ailleurs, on a toujours* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^i$, *il vient que pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Ker} f^i = \operatorname{Ker} f$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. *Alors il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $x = f(x_0)$ *et par ailleurs* $f(x) = 0$. *Comme* $f\left(f(x_0)\right) = 0$ *et que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$, *il vient que* $x_0 \in \operatorname{Ker} f$ *et donc* $x = 0$. *La somme est bien directe.*
2. *Supposons que* $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ *soit directe. Remarquons qu'on a toujours* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} f^2$. *Alors* $f\left(f(x)\right) = 0$. *Mais* $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ *donc* $f(x) = 0$. *Alors* $x \in \operatorname{Ker} f$. *On a montré que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. *On en déduit que* $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f^3$, ... *et donc que* $N = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 23.71 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f, g \in L(E)$. *On suppose que*

$$fogof = f, \quad \text{et} \quad gofog = g$$

Montrer que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$$

Solution : *Soit* $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$. *Alors* $f(x) = 0$ *et il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $x = g(x_0)$. *Donc* $g \circ f \circ g(x_0) = x$ *mais on a aussi* $g \circ f \circ g(x_0) = g \circ f(x) = 0$ *donc* $x = 0$ *et* $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ *sont en somme directe.*
Soit $x \in E$. *On peut écrire* $x = x - g \circ f(x) + g \circ f(x)$ *et comme* $f\left(x - g \circ f(x)\right) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$, *il vient que* $x - g \circ f(x) \in \operatorname{Ker} f$. *Par ailleurs, il est clair que* $g \circ f(x) \in \operatorname{Im} g$ *donc* $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.
En conclusion, $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont bien supplémentaires dans* E.

Exercice 23.72 ♡♡

Soit $f \in L(E)$. *On note*

$$A(f) = \{g \in L(E) \mid f \circ g \circ f = 0_{L(E)}\}$$

1. *Montrer que* $A(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* $L(E)$.
2. *Montrer que si* f *est injective, alors*
$$A(f) = \{g \in L(E) \mid \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g\}$$
3. *Montrer que si* f *est surjective, alors*
$$A(f) = \{g \in L(E) \mid \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f\}$$

Solution :

1. *L'endomorphisme nul est clairement dans* $A\left(f\right)$ *donc* $A\left(f\right)$ *n'est pas vide. Soient* $g, g' \in A\left(f\right)$ *et* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. *Alors par linéarité de* f :
$$f \circ \left(\alpha g + \alpha' g'\right) \circ f = \alpha f \circ g \circ f + \alpha' f \circ g \circ f = 0$$
car $g, g' \in A\left(f\right)$. *Donc* $A\left(f\right)$ *est stable par combinaison linéaire. C'est bien un sous-espace vectoriel de* $L(E)$.
2. *Supposons que* f *soit injective. Si* $g \in L(E)$ *est tel que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ *alors pour tout* $x \in E$, $f \circ g \circ f(x) = 0$ *(car* $f(x) \in \operatorname{Ker} g$*) donc* $g \in A\left(f\right)$. *Réciproquement, si* $g \in A\left(f\right)$ *alors pour tout* $x \in E$, $g\left(f(x)\right) \in \operatorname{Ker} f$. *Mais comme* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, *il vient que* $g\left(f(x)\right) = 0$ *et donc que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
3. *Supposons maintenant que* f *est surjective. Si* $g \in L(E)$ *est tel que* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ *alors pour tout* $x \in E$, $f \circ g \circ f(x) = 0$ *car* $g\left(f(x)\right) \in \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$. *Donc* $g \in A\left(f\right)$. *Réciproquement, si* $g \in A\left(f\right)$ *et si* $y \in \operatorname{Im} g$ *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $g(x) = y$ *et comme* f *est surjective, il existe* $x' \in E$ *tel que* $x = f\left(x'\right)$. *Alors* $g \circ f\left(x'\right) = y$. *Mais* $f\left(y\right) = f \circ g \circ f\left(x'\right) = 0$ *car* $f \circ g \circ f = 0$. *Donc* $y \in \operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.

23.7.8 Endomorphismes inversibles

Exercice 23.73 ♡

Soient un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et deux endomorphismes* $u, v \in L(E)$.

1. *Développer* $(u+v)^2$.
2. *Développer* $(\mathrm{id} - u) \circ (\mathrm{id} + u)$.
3. *Si* $u^2 = 0$, *montrer que* $(\mathrm{id} - u)$ *est bijective.*

Solution :

1. On utilise la linéarité de u et v et on trouve : $(u+v)^2 = u^2 + u\circ v + v\circ u + v^2$. Attention, en général, $u\circ v \neq v\circ u$.
2. De même $(\mathrm{id}-u)\circ(\mathrm{id}+u) = \mathrm{id}-u^2$
3. Si $u^2 = 0$, alors $(\mathrm{id}-u)\circ(\mathrm{id}+u) = (\mathrm{id}+u)\circ(\mathrm{id}-u) = \mathrm{id}$ et $(\mathrm{id}-u)$ est bijective d'inverse $\mathrm{id}+u$.

Exercice 23.74 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathrm{L(E)}$ vérifiant $(f-\mathrm{id})o(f+2\,\mathrm{id}) = 0$. Montrer que f est inversible.

Solution : Comme $(f-\mathrm{id})o(f+2\,\mathrm{id}) = 0$ et que f est linéaire, il vient que $f^2+f-2\,\mathrm{id} = 0$ ce qui s'écrit aussi $f\circ\left(\frac{\mathrm{id}+f}{2}\right) = \mathrm{id}$ ou encore $\left(\frac{\mathrm{id}+f}{2}\right)\circ f = \mathrm{id}$. Donc f est inversible d'inverse $\boxed{f^{-1} = \frac{\mathrm{id}+f}{2}}$.

Exercice 23.75 ♡

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u \in \mathrm{L(E)}$. On suppose qu'il existe des scalaires $a_0,\dots,a_n$ tels que $a_0\,\mathrm{id}+a_1 u+\dots+a_n u^n = 0$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. Montrer que u est un automorphisme de E.

Solution : Comme $a_0\,\mathrm{id}+a_1u+\dots+a_nu^n = 0$, on a $-(a_nu^n+\ldots+a_1u) = a_0\,\mathrm{id}$ et $u\left(-\frac{a_n}{a_0}u^{n-1}-\ldots-\frac{a_1}{a_0}\mathrm{id}\right) = \left(-\frac{a_n}{a_0}u^{n-1}-\ldots-\frac{a_1}{a_0}\mathrm{id}\right)u = \mathrm{id}$ donc u est inversible et $\boxed{u^{-1} = -\left(\frac{a_n}{a_0}u^{n-1}+\ldots+\frac{a_1}{a_0}\mathrm{id}\right)}$.

Exercice 23.76 ♡

On considère les deux endomorphismes de $\mathrm{E}=\mathbb{R}^2$ suivants :

$$u:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (y,0)\end{array}\right. \quad \text{et } v:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (0,x)\end{array}\right.$$

1. *Calculer $u\circ v$, $v\circ u$, u^2 et v^2. Conclusion ?*
2. *Montrer que l'endomorphisme $(\mathrm{id}-u)$ est inversible et déterminer son inverse.*

Solution :

1. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on calcule

   - $u\circ v(x,y) = u(0,x) = (x,0)$.
   - $v\circ u(x,y) = v(y,0) = (0,y)$.
   - $u^2(x,y) = u(y,0) = (0,0)$.
   - $v^2(x,y) = v(0,x) = (0,0)$.

   donc $u\circ v$ est la projection sur les abscisses, $v\circ u$ est la projection sur les ordonnées et $u^2 = v^2 = 0$.
2. On utilise l'exercice 23.73. Comme $u^2 = 0$, $\mathrm{id}-u$ est inversible et d'inverse $\mathrm{id}+u$.

Exercice 23.77 ♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $k\in\mathrm{GL(E)}$. On considère l'application

$$\varphi_k:\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{L(E)} & \longrightarrow & \mathrm{L(E)}\\ u & \longmapsto & k\circ u\end{array}\right.$$

Montrer que $\varphi_k\in\mathrm{GL(L(E))}$ puis que l'application

$$\psi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{GL(E)} & \longrightarrow & \mathrm{GL(L(E))}\\ k & \longmapsto & \varphi_k\end{array}\right.$$

est un morphisme de groupes injectif.

Solution : On vérifie que φ_k est linéaire. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ et $u,v\in\mathrm{L(E)}$. On a $\varphi_k(\alpha u+\beta v) = k\circ(\alpha u+\beta v) = \alpha k\circ u+\beta k\circ v = \alpha\varphi_k(u)+\beta\varphi_k(v)$ par linéarité de k.
L'application φ_k est bien à valeurs dans $\mathrm{L(E)}$ car la composée de deux applications linéaires est encore linéaire.
Enfin, φ_k est bijective. En effet, comme k est inversible, on a $\varphi_k\circ\varphi_{k^{-1}} = \varphi_{k^{-1}}\circ\varphi_k = \mathrm{id}_{\mathrm{L(E)}}$.
Soient $k,k'\in\mathrm{GL(E)}$. On a $\psi(k\circ k') = \varphi_{k\circ k'} = \varphi_k\circ\varphi_{k'}$ donc ψ est un morphisme de groupes. De plus, si $k\in\operatorname{Ker}\psi$ alors $\psi(k) = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ donc $\varphi_k = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ ce qui n'est possible que si $k = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ donc $\operatorname{Ker}\psi = \{\mathrm{id}_\mathrm{E}\}$ et ψ est injectif.

Exercice 23.78 ♡

Soient E *un* K*-espace vectoriel et* f *un endomorphisme de* E *nilpotent. Prouver que* $\mathrm{id}-f$ *est inversible et exprimer son inverse en fonction de* f.

Solution : *Supposons que* f *est nilpotent d'ordre* $n\in\mathbb{N}^*$. *Alors par linéarité de* f *il vient que :*

$$\left(\mathrm{id}-f\right)\circ\left(\mathrm{id}+f+f^2+\ldots+f^{n-1}\right)=\left(\mathrm{id}+f+f^2+\ldots+f^{n-1}\right)-\left(f+f^2+\ldots+f^{n-1}+f^n\right)=\mathrm{id}$$

par télescopage et car $f^n=0$. *De même* $\left(\mathrm{id}+f+f^2+\ldots+f^{n-1}\right)\circ\left(\mathrm{id}-f\right)=\mathrm{id}$ *donc* $\mathrm{id}-f$ *est inversible et* $\boxed{\left(\mathrm{id}-f\right)^{-1}=\mathrm{id}+f+f^2+\ldots+f^{n-1}}$.

Exercice 23.79 ♡♡

On considère $\mathbb{C}$ *comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Soit* $p\in\mathbb{C}$. *On définit* $f:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ *par* $f(z)=z+p\overline{z}$. *Vérifier que* $f\in\mathrm{L}(\mathbb{C})$ *puis déterminer* $\operatorname{Ker} f$. *A quelle condition* f *est-il un automorphisme ?*

Solution : f *est linéaire (vérification immédiate). Cherchons son noyau : soit* $z\in\mathbb{C}$ *:*

$$f(z)=0 \implies z=-p\overline{z}$$

En prenant le conjugué, $\overline{z}=-\overline{p}z$ *et donc* $z=|p|^2z$ *d'où* $(1-|p|^2)z=0$.

1. *Si* $|p|\neq1$, *alors* $z=0$. *Par conséquent,* $\operatorname{Ker} f=\{0\}$.
2. *Si* $|p|=1$ *alors* $\exists\alpha\in[0,2\pi[$ *tel que* $p=e^{i\alpha}$. *Par ailleurs* $\exists r\geqslant0$, $\exists\theta\in[0,2\pi[$, *tels que* $z=re^{i\theta}$. *Alors*

$$z=-p\overline{z}\implies e^{2i\theta}=e^{i(\alpha+\pi)}\iff\theta=\tfrac{\alpha+\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$$

Donc $\operatorname{Ker} f$ *est une droite vectorielle :*

$$\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(u),\quad u=e^{i(\frac{\alpha+\pi}{2})}$$

On peut déjà conclure que si $|p|=1$, *alors* f *n'est pas un automorphisme.*
Lorsque $|p|=1$, *on a vu que* f *était injective. Vérifions qu'elle est surjective. Soit* $u\in\mathbb{C}$. *Cherchons* $z\in\mathbb{C}$ *tel que* $z+p\overline{z}=u$. *En prenant le conjugué et en multipliant par* p, *on trouve que* $p\overline{z}+|p|^2z=p\overline{u}$. *En éliminant* $\overline{z}$, *on trouve que* $z=\dfrac{u-p\overline{u}}{1-|p|^2}$ *qui réciproquement vérifie bien* $f(z)=u$.
En conclusion, $\boxed{f\in\mathrm{GL}(\mathbb{C})\iff|p|\neq1}$.

Exercice 23.80 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $f\in\mathrm{L(E)}$ *tel que* $f^2=\mathrm{id}$. *Soit* $b\in\mathrm{E}$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$. *Montrer que l'équation* $x+\lambda f(x)=b$ *possède une unique solution.*

Solution : *Supposons que* $x\in\mathrm{E}$ *est solution de l'équation :* $x+\lambda f(x)=b$ *et en appliquant* f, *on a* $\lambda x+f(x)=f(b)$. *En multipliant la seconde relation par* λ, *et en éliminant* $f(x)$, *on trouve que* $x=\dfrac{1}{1-\lambda^2}(b-f(b))$ $(1-\lambda^2\neq0)$. *Donc si l'équation possède une solution, elle est forcément unique. Vérifions que le vecteur* x *précédemment trouvé est bien solution :*

$$\frac{1}{1-\lambda^2}(b-f(b))+\lambda\left(\frac{1}{1-\lambda^2}(f(b)-f^2(b))\right)=\frac{1}{1-\lambda^2}(1-\lambda^2)b=b$$

Exercice 23.81 ♡♡

Soient deux endomorphismes $(f,g)\in\mathrm{L(E)}^2$ *tels que* $\mathrm{E}=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Ker} g=\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Im} g$. *Montrer que* $(f+g)\in\mathrm{GL(E)}$.

Solution :

1. *Montrons que* $\operatorname{Ker}(f+g)=\{0_\mathrm{E}\}$. *Soit* $x\in\operatorname{Ker}(f+g)$. *Comme* $\mathrm{E}=\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g)$, *il existe* $(x_1,x_2)\in\operatorname{Ker}(f)\times\operatorname{Ker}(g)$ *tels que* $x=x_1+x_2$. *Alors* $f(x)=f(x_2)$ *et* $g(x)=g(x_1)$. *Comme* $(f+g)(x)=0$, *on en déduit que* $f(x_2)+g(x_1)=0$, *c'est-à-dire* $z=f(x_2)=-g(x_1)\in\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Im} g$. *Mais puisque la somme* $\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)$ *est directe,* $\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Im}(g)=\{0_\mathrm{E}\}$ *et donc* $f(x_2)=g(x_1)=0_\mathrm{E}$ *ce qui montre que* $f(x)=g(x)=0_\mathrm{E}$, *c'est-à-dire* $x\in\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g)$. *Mais puisque la somme* $\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g)$ *est directe, finalement* $x=0_\mathrm{E}$.
2. *Montrons que* $\mathrm{E}=\operatorname{Im}(f+g)$. *Soit* $y\in\mathrm{E}$. *Comme* $\mathrm{E}=\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)$, *il existe* $(x_1,x_2)\in\mathrm{E}^2$ *tel que* $y=x_1+x_2$. *Mais comme* $\mathrm{E}=\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g)$, *il existe* $(x_{11},x_{12},x_{21},x_{22})\in\operatorname{Ker}(f)\times\operatorname{Ker}(g)\times\operatorname{Ker}(f)\times\operatorname{Ker}(g)$ *tels que* $x_1=x_{11}+x_{12}$

et $x_2 = x_{21} + x_{22}$. Alors $f(x_1) = f(x_{12})$ et $g(x_2) = g(x_{21})$. Posons $x = x_{12} + x_{21}$. On calcule $(f+g)(x) = f(x_{12}) + g(x_{12}) + f(x_{21}) + g(x_{21}) = f(x_{12}) + g(x_{21}) = y$.

Exercice 23.82 ♡♡♡

Soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. Soient deux réels distincts $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$(u - a\mathrm{id}) \circ (u - b\mathrm{id}) = 0$$

1. *Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b\mathrm{id})$.*
2. *Déterminer la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id})$ et à $\mathrm{Ker}(u - b\mathrm{id})$.*

Solution :

1. *Remarquons tout d'abord que $\mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u - b\mathrm{id})$ sont bien des sous-espaces vectoriels de E car ce sont des noyaux d'applications linéaires. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(u - b\mathrm{id})$. Alors $u(x) = ax$ et $u(x) = bx$. Comme $a \neq b$ on a forcément $x = 0$ et les deux sous-espaces sont en somme directe. Remarquons que $1/(b-a)(\mathrm{X}-a) + 1/(a-b)(\mathrm{X}-b) = 1$ donc $1/(b-a)(u - a\mathrm{id}_\mathrm{E}) + 1/(a-b)(u - b\mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. De plus, en vertu du fait que $(u - a\mathrm{id}) \circ (u - b\mathrm{id}) = 0$, $\mathrm{Im}\, 1/(b-a)(u - a\mathrm{id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(u - b\mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}\, 1/(a-b)(u - b\mathrm{id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id})$. De plus, pour tout $x \in \mathrm{E}$ on a :*
$$x = \underbrace{\frac{1}{b-a}(u(x) - ax)}_{\in \mathrm{Ker}(u - b\mathrm{id})} + \underbrace{\frac{1}{a-b}(u(x) - bx)}_{\in \mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id})}$$
donc $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id}) + \mathrm{Ker}(u - b\mathrm{id})$. En conclusion, on a bien $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b\mathrm{id})$.
2. *Déterminons la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id})$. Si $x \in \mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id})$ alors $u(x) = ax$ donc $u_{|\mathrm{Ker}(u - a\mathrm{id})}$ est une homothétie de rapport a. De même $u_{|\mathrm{Ker}(u - b\mathrm{id})}$ est une homothétie de rapport b.*

23.7.9 Transformations vectorielles

Exercice 23.83 ♡

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ et $\mathrm{E}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Déterminer l'expression analytique du projecteur p sur E_2 parallèlement à E_1.

Solution : *On vérifie facilement que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. On note $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base de E formée de $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. On remarque que $\mathrm{E}_1 = \mathrm{V}ect(f_1)$ avec $f_1 = (1,1,1)$ et que $\mathrm{E}_2 = \mathrm{V}ect(f_2, f_3)$ avec $f_2 = (1,0,-1)$ et $f_3 = (0,1,-1)$. En utilisant les outils du chapitre 3, on montre que f_1, f_2, f_3 ne sont pas coplanaires et qu'ils forment donc une base f de E. Soit $v \in \mathrm{E}$. On note (x,y,z) les coordonnées de v dans e et (α,β,γ) ses coordonnées dans f. De l'égalité $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$ on tire le système $\begin{cases} x &= \beta + \alpha \\ y &= \gamma + \alpha \\ z &= -\beta - \gamma + \alpha \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} \beta &= \frac{1}{3}(2x - y - z) \\ \gamma &= \frac{1}{3}(-x + 2y + z) \\ \alpha &= \frac{1}{3}(x + y + z) \end{cases}$. Comme $f_1 \in \mathrm{E}_1$ et que $f_2, f_3 \in \mathrm{E}_2$ on doit avoir*

$$p(v) = \beta f_2 + \gamma f_3 = \frac{1}{3}\big((2x - y - z)(1,0,-1) + (-x + 2y + z)(0,1,-1)\big) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y + z, -x - y)$$

et donc $\boxed{p(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y + z, -x - y)}$.

Exercice 23.84 ♡

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport au sous-espace E_1 parallèlement au sous-espace E_2 où :

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(1,1,1)\big) \text{ et } \mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}(1,2,0)$$

Solution : *Soit s cette symétrie et soient $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (1,2,0)$. Soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ les vecteurs de la base naturelle de $\mathbb{R}^3$.*
On a $s(u) = u$ et $s(v) = v$. $s(w) = -w$. On a $e_1 = u$, $e_2 = \frac{1}{2}(w - u)$ et $e_3 = v - \frac{1}{2}(w + u)$.

On en déduit $s(e_1)=e_1=(1,0,0)$, $s(e_2)=-\frac{1}{2}(w+u)=(-1,-1,0)$ et $s(e_3)=v+\frac{1}{2}(w-u)=(1,2,1)$. Finalement, $s(x,y,z)=(x-y+z,-y+2z,z)$ et l'expression analytique de s s'écrit : $\begin{cases} x'=x+y+z \\ y'=y+2z \\ z'=z \end{cases}$.

Exercice 23.85 ♡

Soit :

$$\theta:\begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \theta(P) \end{cases}$$

où $\theta(P)$ est le polynôme donné par :

$$(\theta(P))(X)=\frac{P(X)+P(-X)}{2}.$$

1. *Prouver que θ est linéaire.*
2. *Prouver sur l'ensemble des polynômes pairs est stable par θ.*
3. *Montrer que $\theta\circ\theta=\theta$. Que peut-on en déduire pour θ.*
4. *Déterminer $\operatorname{Ker}\theta$ et $\operatorname{Im}\theta$. En déduire les éléments caractéristiques de θ.*

Solution :

1. *Facile.*
2. *On montre aussi facilement que si P est pair, il en est de même de $\theta(P)$.*
3. *Soit P un polynôme à coefficients réels, on a :*

$$\theta\circ\theta(P)(X)=\theta\left(\frac{P(X)+P(-X)}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{P(X)+P(-X)}{2}+\frac{P(-X)+P(X)}{2}\right)=\theta(P)(X)$$

   donc θ est un projecteur.
4. *Si $\theta(P)=0$ alors $\forall X\in\mathbb{R},\quad P(X)=-P(-X)$ donc P est impair. Réciproquement si P est impair alors $\theta(P)$. $\operatorname{Ker}\theta=\{P\in\mathbb{R}[X]\mid P \text{ a tous ses termes de degré pair nuls}\}$. On a par ailleurs $\theta(P)$ est pair pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$. Réciproquement, si P est pair, alors $\theta(P)=P$ donc $\operatorname{Im}\theta=\{P\in\mathbb{R}[X]\mid P \text{ a tous ses termes de degré impair nuls}\}$.*

Exercice 23.86 ♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p\in\mathscr{L}(E)$.

1. *Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{id}-p$ l'est.*
2. *On suppose que p est un projecteur. Exprimer alors $\operatorname{Im}(\mathrm{id}-p)$ et $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}-p)$ en fonction de $\operatorname{Im}p$ et $\operatorname{Ker}p$.*

Solution :

1. *Comme $(\mathrm{id}-p)^2=\mathrm{id}-2p+p^2$, p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{id}-p$ est un projecteur.*
2. *On a $\operatorname{Ker}p=\operatorname{Im}(\mathrm{id}-p)$. En effet, si $x\in\operatorname{Ker}p$ alors $p(x)=0$ et $(\mathrm{id}-p)(x)=x$. Donc $x\in\operatorname{Im}(\mathrm{id}-p)$. Réciproquement, si $x\in\operatorname{Im}(\mathrm{id}-p)$ alors il existe x_0 tel que $x=(\mathrm{id}-p)(x_0)$ Donc $p(x)=p(x_0)-p^2(x_0)=0$.*

Exercice 23.87 ♡♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p,q\in\mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :

1. *$p\circ q=p$ et $q\circ p=q$.*
2. *p et q sont des projecteurs et $\operatorname{Ker}p=\operatorname{Ker}q$.*

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ *Comme*

$$p^2=p\circ\underbrace{q\circ p}_{=q}\circ q=p\circ q\circ q=p\circ q=p,$$

p est un projecteur. On montre de même que q est un projecteur. Si $x\in\operatorname{Ker}p$ alors $q(x)=q\circ p(x)=0$ donc $x\in\operatorname{Ker}q$ et $\operatorname{Ker}p\subset\operatorname{Ker}q$. On montre de même que $\operatorname{Ker}q\subset\operatorname{Ker}p$. Donc $\operatorname{Ker}p=\operatorname{Ker}q$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Comme q est un projecteur, $\operatorname{Ker}p$ et $\operatorname{Im}p$ sont supplémentaires dans E . Soit $x\in E$. Il existe un unique couple $(x',x'')\in\operatorname{Ker}q\times\operatorname{Im}q$ tel que $x=x'+x''$. Alors*

$$p\circ q(x)=p\circ q(x'')=p(x'')\quad\text{et}\quad p(x)=p(x'+x'')=p(x'')$$

car $\operatorname{Ker}p=\operatorname{Ker}q$ et que $q(x'')=x''$. Donc $p\circ q(x)=p(x)$ et $p\circ q=p$. On montre de même que $q\circ p=q$.

Exercice 23.88 ♡♡

Soit un projecteur p d'un K-e.v. E. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathrm{K}\setminus\{0,1\}, \quad p-\lambda\,\mathrm{id} \in \mathrm{GL(E)}$$

Indication 23.23 : On fera deux démonstrations. Pour la première, utiliser la relation polynomiale $p\circ p = p$. Pour la deuxième, écrire que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$*, et résoudre l'équation* $(p-\lambda\,\mathrm{id})(x) = y$*, en décomposant sur* $\mathrm{Ker}\, p$ *et* $\mathrm{Im}\, p$ *les vecteurs x et y.*

Solution : Première démonstration. *On a $p\circ p = p$, donc $p^2 - p = 0$, et alors $(p-\lambda\,\mathrm{id})\circ(p+(\lambda-1)\,\mathrm{id}) + \lambda(\lambda-1)\,\mathrm{id} = 0$ donc si $\lambda \notin \{0,1\}$, on peut écrire*

$$(p-\lambda\,\mathrm{id})\circ\left[\frac{-1}{\lambda(\lambda-1)}\big(p+(\lambda-1)\,\mathrm{id}\big)\right] = \mathrm{id}$$

ce qui montre que $(p-\lambda\,\mathrm{id})$ est inversible.
Deuxième démonstration. *Soit $y\in\mathrm{E}$. On décompose $y = y_1+y_2$ avec $y_1\in\mathrm{Ker}\,p$ et $y_2\in\mathrm{Im}\,p$. Soit $x = x_1+x_2\in\mathrm{E}$. Alors $(p-\lambda\,\mathrm{id})(x) = y \iff x_2-\lambda(x_1+x_2) = y_1+y_2 \iff -\lambda x_1 = y_1$ et $(1-\lambda)x_2 = y_2$ (on a utilisé le fait que la somme est directe et donc que la décomposition est unique). On trouve une unique solution $x_1 = -\dfrac{1}{\lambda}y_1$ et $x_2 = \dfrac{1}{1-\lambda}y_2$, c'est-à-dire qu'il existe un unique antécédant à y par l'application $(p-\lambda\,\mathrm{id})$. Cette application est donc bijective.*

Exercice 23.89 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux projecteurs p, q de E vérifiant :

$$p\circ q = q\circ p$$

1. *Montrer que $p\circ q$ est un projecteur :*
2. *Montrer que* $\mathrm{Im}\,(p\circ q) = \mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q$ *;*
3. *Montrer que* $\mathrm{Ker}(p\circ q) = \mathrm{Ker}\,p+\mathrm{Ker}\,q$.

Solution :

1. *Calculons*
$$(p\circ q)^2 = p\circ q\circ p\circ q = p\circ p\circ q\circ q = p^2\circ q^2 = p\circ q$$
Donc $p\circ q$ est un projecteur.
2. $\mathrm{Im}\,(p\circ q)\subset\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q$ *: soit $y\in\mathrm{Im}\,(p\circ q)$. $\exists x\in\mathrm{E}$ tel que $y = p\circ q(x)$. Comme $y = p\big(q(x)\big)$, $y\in\mathrm{Im}\,p$. Mais puisque $p\circ q = q\circ p$, on a également $y = q\big(p(x)\big)\in\mathrm{Im}\,q$. Donc $y\in\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q$.*
$\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q\subset\mathrm{Im}\,(p\circ q)$*. Utilisons la caractérisation de l'image d'un projecteur : Soit $x\in\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q$. Alors $p(x) = q(x) = x$. Alors $p\circ q(x) = p\big(q(x)\big) = p(x) = x$ et par conséquent, $x\in\mathrm{Im}\,p\circ q$.*
3. *Montrons* $\mathrm{Ker}\,p+\mathrm{Ker}\,q\subset\mathrm{Ker}(p\circ q)$ *: Soit $x\in\mathrm{Ker}\,p+\mathrm{Ker}\,q$; $\exists(x_p,x_q)\in\mathrm{Ker}\,p\times\mathrm{Ker}\,q$ tels que*
$$x = x_p + x_q$$
Alors
$$p\circ q(x) = p\big(q(x_p)+q(x_q)\big) = p\big(q(x_p)\big) = q\big(p(x_p)\big) = q(0) = 0$$
donc $x\in\mathrm{Ker}(p\circ q)$.
Montrons que $\mathrm{Ker}(p\circ q)\subset\mathrm{Ker}\,p+\mathrm{Ker}\,q$. Soit $x\in\mathrm{Ker}(p\circ q)$. Posons $x_p = q(x)$ et $x_q = x-q(x)$. On a bien $x = x_p+x_q$ et
$$p(x_p) = p\circ q(x) = 0 \implies x_p\in\mathrm{Ker}\,p$$
$$q\big(x-q(x)\big) = q(x)-q^2(x) = q(x)-q(x) = 0 \implies x_q\in\mathrm{Ker}\,q$$

Exercice 23.90 ♡♡

Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux projecteurs p, q de E vérifiant $p o q = 0$. On pose $r = p+q-q o p$.

1. *Montrer que r est un projecteur ;*
2. *Montrer que* $\mathrm{Ker}\,r = \mathrm{Ker}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q$ *;*
3. *Montrer que* $\mathrm{Im}\,r = \mathrm{Im}\,p\oplus\mathrm{Im}\,q$.

Indication 23.23 : Interpréter la relation $p\circ q = 0$ en fonction des images et noyaux de p, q. Dans les démonstrations, on pourra utiliser le fait que si r est un projecteur, et $x\in\mathrm{E}$, $x\in\mathrm{Im}\,r\iff r(x) = x$.

Solution :

1. Calculons

$$r^2 = p^2 + pq - pqp + qp + q^2 - q^2p - qp^2 - qpq + qpqp = p + qp + q - qp - qp = p + q - qp = r$$

(on a utilisé que $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $pq = 0$). Donc r est un projecteur (r est linéaire).

2. $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$: soit $x \in \operatorname{Ker} r$, alors $p(x) + q(x) - qp(x) = 0$, et en appliquant p, on trouve que $p^2(x) + pq(x) - pqp(x) = 0$, d'où $p(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} p$. De même, en appliquant q, on montre que $x \in \operatorname{Ker} q$.
$\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$, c'est évident.

3. $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$: soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $pq(x) = 0 \implies p(x) = 0$ (car $x \in \operatorname{Im} q$) et alors $x = 0$ ($p(x) = x$, car $x \in \operatorname{Im} p$). La somme est donc directe.
$\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$: soit $x \in \operatorname{Im} r$, puisque r est un projecteur, $r(x) = x$ et donc

$$x = p(x) + q(x) - qp(x) = p(x) + q\left[x - p(x)\right]$$

et $p(x) \in \operatorname{Im} p$, $q\big(x - p(x)\big) \in \operatorname{Im} q$.
$\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$: soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, $\exists x_1 \in \operatorname{Im} p, \exists x_2 \in \operatorname{Im} q$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors, $r(x) = p(x_1) + p(x_2) + q(x_1) + q(x_2) - qp(x_1) - qp(x_2) = x_1 + x_2 + p(x_2) + q(x_1) - qp(x_1) - qp(x_2)$. Mais $p \circ q = 0 \implies \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$, donc $p(x_2) = 0$. Alors $r(x) = x + q\big(x_1 - p(x_1)\big)$, mais puisque $x_1 \in \operatorname{Im} p$, on sait que $p(x_1) = x_1$, et donc $r(x) = x$. Comme r est un projecteur, $r(x) = x \implies x \in \operatorname{Im} r$.

Exercice 23.91 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Résoudre l'équation $p(x) + 3x = y$ où $y \in \mathrm{E}$.

Solution : Comme p est un projecteur, les sous-espaces $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E. Donc il existe un unique couple $\left(x', x''\right) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = x' + x''$ et il existe un unique couple $\left(y', y''\right) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $y = y' + y''$. Il vient :

$$p(x) + 3x = y \iff x'' + 3x' + 3x'' = y' + y'' \iff \underbrace{3x'}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{4x''}_{\in \operatorname{Im} p} = \underbrace{y'}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{y''}_{\in \operatorname{Im} p} \iff \begin{cases} 3x' &= y' \\ 4x'' &= y'' \end{cases} \iff x = \frac{y'}{3} + \frac{y''}{4}$$

par unicité de la décomposition des vecteurs dans $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. En conclusion, $\boxed{x = \dfrac{y - p(y)}{3} + \dfrac{p(y)}{4}}$.

Exercice 23.92 ♡♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Calculer $(\mathrm{id} + p)^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Solution : Comme id et p commutent, on peut appliquer la formule du binôme et

$$(\mathrm{id} + p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k = \mathrm{id} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\right) p = \boxed{\mathrm{id} + \left(2^n - 1\right) p}$$

car $p^2 = p$.

Exercice 23.93 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. Soit p un projecteur de E.
Montrer que u et p commutent si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que u et p commutent. Soit $y \in \operatorname{Im} p$. Mais $p\big(u(y)\big) = u\big(p(y)\big) = u(y)$ car $y \in \operatorname{Im} p$. Donc $u(y) \in \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p$ est stable par u. Si $x \in \operatorname{Ker} p$ alors $p(u(x)) = u\big(p(x)\big) = 0$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} p$ est aussi stable par u.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u. Comme p est un projecteur, $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe un unique couple $\left(x', x''\right) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = x' + x''$. Il vient que $u \circ p(x) = u\left(x''\right)$ et que $p \circ u(x) = p\left(u\left(x''\right)\right) = u\left(x''\right)$. On a montré que $u \circ p(x) = p \circ u(x)$ donc u et v commutent.

Exercice 23.94 ♡♡♡

[Décomposition du noyau] Soient un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. On note

$$\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = i\,x\} \text{ et } \mathrm{G} = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = -i\,x\}$$

Montrer que $E = F \oplus G$ *et exprimer le projecteur sur* F *parallèlement à* G.

Solution : *Pour tout* $x \in E$, *on a* $x = -\frac{i}{2}\left(f(x) + ix\right) + \frac{i}{2}\left(f(x) - ix\right)$ *et on vérifie que* $f(x) + ix \in F$, $f(x) - ix \in G$. *En effet :*

$$f\left(f(x) + ix\right) = f^2(x) + if(x) = -ix + if(x) = i\left(f(x) + ix\right)$$

$$f\left(f(x) - ix\right) = f^2(x) - if(x) = -if(x) - if(x) = -i\left(f(x) - ix\right)$$

Donc $E = F + G$. *Si* $x \in F \cap G$ *alors on a en même temps* $f(x) = ix$ *et* $f(x) = -ix$ *ce qui n'est possible que si* $x = 0$. *Donc* F *et* G *sont en somme directe. En conclusion,* $E = F \oplus G$.
Montrons que $p = -\frac{i}{2}\left(f + i\,\mathrm{id}\right)$ *est le projecteur sur* F *parallèlement à* G. *Soit* $x = x_1 + x_2 \in F \oplus G$. *Alors* $p(x) = -\frac{i}{2}\left(f(x_1) + f(x_2) + i(x_1 + x_2)\right) = -\frac{i}{2}\left(ix_1 - ix_2 + ix_1 + ix_2\right) = x_1$, *ce qu'il fallait montrer.*
Cet exercice est un cas particulier du théorème de décomposition du noyau que vous verrez en deuxième année.

Exercice 23.95 ♡♡♡

Soient deux projecteurs p *et* q *d'un espace vectoriel* E. *Montrer que l'endomorphisme* $(p+q)$ *est un projecteur de* E *si et seulement si l'on a* $p \circ q = q \circ p = 0$. *Si c'est le cas, montrer qu'alors* $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ *et que* $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Solution :

- *On suppose que* $p+q$ *est un projecteur. Alors* $\left(p+q\right)^2 = p+q$ *et en développant, on obtient* $p^2+q^2+p\circ q+q\circ p = p+q$. p, q *étant des projecteurs, on a :* $p^2 = p$ *et* $q^2 = q$ *et donc* $p \circ q + q \circ p = 0$. *On va montrer que* $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ *ce qui amènera* $p \circ q = 0$ *et donc* $q \circ p = 0$. *Soit* $y \in \operatorname{Im} q$. *Alors* $p\left(y\right) + q\left(p\left(y\right)\right) = 0$. *Comme* $E = \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q$, *il existe* $X \in \operatorname{Ker} q$ *et* $Y \in \mathrm{I}mq$ *tel que* $p\left(y\right) = X + Y$. *Alors* $X + Y + q(X+Y) = 0$ *soit* $X + 2Y = 0$. *Par unicité de la décomposition d'un vecteur sur une somme directe, il vient* $X = Y = 0$ *et donc* $p\left(y\right) = 0$. *On a prouvé que* $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} q$ *et la première implication est démontrée.*
- *Pour la seconde, supposons que* $p \circ q = q \circ p = 0$ *alors* $\left(p+q\right)^2 = p^2 + q^2 + p\circ q + q \circ p = p + q$ *car* p *et* q *sont des projecteurs.*
- *On suppose dans la suite que* $(p+q)$ *est un projecteur de* E.
  - *Montrons que* $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$. *Soit* $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. *Alors* $p(x) = q(x) = x$ *et il vient* $q\left(p(x)\right) = x$. *Mais* $q \circ p = 0$ *donc* $x = 0$. *Donc* $\operatorname{Im} p$ *et* $\operatorname{Im} q$ *sont en somme directe. Si* $x \in \operatorname{Im} p + q$ *alors* $x = \left(p+q\right)(x) = p(x) + q(x) \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ *et* $\operatorname{Im} p + q \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. *Si* $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ *alors il existe* $x_1 \in \operatorname{Im} p$ *et* $x_2 \in \operatorname{Im} q$ *tel que* $x = x_1 + x_2$. *Mais* $\left(p+q\right)(x) = p(x_1) + p(x_2) + q(x_1) + q(x_2) = x_1 + x_2$ *car* $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ *et* $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$ *en vertu de* $p \circ q = q \circ p = 0$. *Donc* $x \in \operatorname{Im} p + q$ *et on prouve ainsi par double inclusion que* $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.
  - *Montrons maintenant que* $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. *On montre facilement que* $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p+q)$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$. *Alors* $p(x) + q(x) = 0$ *et* $p(x) = -q(x)$. *Posons* $y = p(x)$. *On sait alors que* $y \in \operatorname{Im} p$ *et que* $y \in \operatorname{Im} q$. *Mais* $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$ *et* $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ *donc* $y \in \operatorname{Ker} q$ *et* $y \in \operatorname{Ker} p$. *Comme* $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ *et* $E = \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q$, *ceci n'est possible que si* $y = 0$. *Donc* $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ *et l'égalité est prouvée par double inclusion.*

23.7.10 Formes linéaires

Exercice 23.96 ♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f, g \in E^*$ *deux formes linéaires telles que* $\forall x \in E$, $f(x)g(x) = 0_{\mathbb{K}}$. *Montrer que* $f = 0$ *ou* $g = 0$.

Solution : *Si il existe* $a \in E$ *tel que* $f(a) \neq 0$ *et* $b \in E$ *tel que* $g(b) \neq 0$, *alors*

$$0 = f(a+b)g(a+b) = f(a)g(a) + f(a)g(b) + f(b)g(a) + f(b)g(b) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

Donc $f(a)g(b) = -f(b)g(a)$ *et comme* $f(a) \neq 0$, $g(b) \neq 0$, *nécessairement* $f(b) \neq 0$ *et* $g(a) \neq 0$. *Il vient alors que* $f(a)g(a) \neq 0$ *ce qui est contraire à notre hypothèse de départ. Donc* $f = 0$ *ou* $g = 0$.

Exercice 23.97 ♡

Soient E *un espace vectoriel et* a *un vecteur de* E. *Soit* φ *une forme linéaire sur* E. *On définit* $u(x) = x + \varphi(x)a$. *Vérifier que* u *est un endomorphisme de* E, *puis calculer* u^2. *A quelle condition* u *est-elle injective ?*

Solution : *Soient* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ *et* $x, x' \in E$. *Par linéarité de* φ

$$u\left(\alpha x + \alpha' x'\right) = \alpha x + \alpha' x' + \varphi\left(\alpha x + \alpha' x'\right) a = \alpha\left(x + \varphi(x)a\right) + \alpha'\left(x' + \varphi(x')a\right) = \alpha u(x) + \alpha' u\left(x'\right)$$

donc u *est linéaire.*

Soit $x \in \mathrm{E}$.

$$u^2(x) = u\big(x + \varphi(x)a\big) = u(x) + \varphi(x)u(a) = x + \varphi(x)a + \varphi(x)\big(a + \varphi(a)a\big) = x + \big(2 + \varphi(a)\big)\varphi(x)a$$

L'application u est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul de E. Mais $u(x) = 0 \Longleftrightarrow x + \varphi(x)a = 0 \Longleftrightarrow x = -\varphi(x)a$. Donc un vecteur x est élément du noyau de u si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = \alpha a$ et $\varphi(x) = -\alpha$. On a alors $\alpha a = -\alpha\varphi(a)a$ ce qui s'écrit aussi $\alpha\big(1 - \varphi(a)\big)a = 0$. Pour que le noyau de u ne soit pas trivial, il faut donc que $\varphi(a) = -1$, dans quel cas, u n'est pas injective. Sinon, si $\varphi(a) \neq -1$, φ est injective.

Exercice 23.98 ♡

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables sur $[0,1]$ et $\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & f'(0) \end{array} \right.$.

1. *Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
2. *On pose $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,\delta$. Trouver un supplémentaire de H dans E.*

Solution :

1. *On montre facilement que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel en prouvant que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$.*
2. *Montrons que l'ensemble des fonctions affines sur $[0,1]$, noté I, est un supplémentaire de H dans E. Soit $f \in \mathrm{E}$. Alors $f = \big(f - f'(0)x\big) + f'(0)x$. Il est clair que $x \mapsto f - f'(0)x \in \mathrm{H}$ et que $x \mapsto f'(0)x \in \mathrm{I}$. Donc $\mathrm{E} = \mathrm{H} + \mathrm{I}$. Si $f \in \mathrm{H} \cap \mathrm{I}$ alors $f'(0) = 0$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto ax$. Alors $a = 0$ et $f = 0$. Donc H et I sont en somme directe. En conclusion, $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{I}$.*

Exercice 23.99 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$, on définit

$$^t u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E}^\star & \longrightarrow & \mathrm{E}^\star \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{array} \right.$$

1. *Montrer que $^t u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}^\star)$.*
2. *Si $(u,v) \in \mathrm{L}(\mathrm{E})^2$, calculer $^t(u \circ v)$.*
3. *Montrer que l'application*
$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathrm{E}^\star) \\ u & \longmapsto & {^t u^{-1}} \end{array} \right.$$
est un morphisme de groupes.
4. *Lorsque $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, montrer que θ est injectif.*

Solution :

1. *Soit $\varphi, \psi \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors $^t u\big(\alpha\varphi + \beta\psi\big) = \big(\alpha\varphi + \beta\psi\big) \circ u = \alpha\varphi \circ u + \beta\psi \circ u = \alpha\, {^t u}(\varphi) + \beta\, {^t u}(\psi)$. Donc $^t u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}^\star)$.*
2. *Soit $\varphi \in \mathrm{E}^\star$. Calculons*
$$^t v \circ {^t u}(\varphi) = {^t v}(\varphi \circ u) = \varphi \circ (u \circ v) = {^t(u \circ v)}(\varphi)$$
Par conséquent, $^t(u \circ v) = {^t v} \circ {^t u}$.
3. *θ est bien définie. Soit $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Comme f est inversible, il existe $f^{-1} \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. Mais en transposant, $^t f^{-1} \circ {^t f} = {^t \mathrm{id}_\mathrm{E}} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}^\star}$. On montre de même que $^t f \circ {^t f^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}^\star}$. Ce qui montre que $^t f^{-1}$ est inversible dans $\mathrm{L}(\mathrm{E}^\star)$. On vérifie sans problème que θ est un morphisme de groupes en utilisant 2.*
4. *Soit $f \in \mathrm{Ker}\,\theta$. Alors $\forall \varphi \in \mathrm{E}^\star$, $^t f^{-1}(\varphi) = \varphi$ et donc*
$$\forall \varphi \in \mathrm{E}^\star,\ \varphi \circ f^{-1} = \varphi$$
En considérant φ_1 et φ_2 les deux projections sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathrm{Vect}(e_2)$, on montre que $f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.