2.9 Solutions

Exercice 1.

Le problème est de déterminer x et y tels qu'il existe α et β vérifiant $(x,1,y,1) = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha - 2\beta \\ y = 3\alpha + 3\beta \\ 1 = 4\alpha - 4\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ -4\beta = 1 - 2x \\ y = y - 3x \\ -8\beta = 1 - 4x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ -4\beta = 1 - 2x \\ y = y - 3x \\ 0 = -1 \end{cases}$$

La dernière ligne entraine qu'il n'y a pas de solution.

Le problème est de déterminer x et y tels qu'il existe α et β vérifiant $(x,1,1,y) = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha - 2\beta \\ 1 = 3\alpha + 3\beta \\ y = 4\alpha - 4\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ -4\beta = 1 - 2x \\ 0 = 1 - 3x \\ -8\beta = y - 4x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ -4\beta = 1 - 2x \\ x = \frac{1}{3} \\ 0 = y - 4x - 2(1 - 2x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ -4\beta = 1 - 2x \\ x = \frac{1}{3} \\ y = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \alpha + \beta \\ \beta = \frac{-1}{12} \\ x = \frac{1}{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5}{12} \\ \beta = \frac{-1}{12} \\ x = \frac{1}{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{3}, 1, 1, 2\right) = \frac{5}{12}u_1 - \frac{1}{12}u_2$$

Exercice 2.

Un vecteur de E s'écrit

$$\begin{aligned} x &= (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1) \end{aligned}$$

Donc $E = Vect((-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)), E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Pour trouver une base, il reste à montrer que $((-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1))$ est libre (Puisque cette famille est déjà génératrice).

$$\begin{aligned} \alpha(-1,1,0,0) + \beta(-1,0,1,0) + \gamma(-1,0,0,1) &= (0,0,0,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette famille est bien libre, c'est une base de E.

Exercice 3.

1.

$$\begin{aligned} \alpha v_1 + 2\beta v_2 + \gamma v_3 &= 0_E \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Une sous famille d'une famille libre est libre.

3.

$$2v_1 - (2v_1 + v_4) + v_4 = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Il existe une combinaison linéaire non identiquement nulle de ces trois vecteurs, la famille est liée. 4.

$$\begin{aligned}
\alpha\left(3v_1+v_3\right)+\beta v_3+\gamma\left(v_2+v_3\right) &= 0_{\mathbb{R}^n} \\
&\Rightarrow 3\alpha v_1+\gamma v_2+(\alpha+\beta+\gamma)v_3=0_E \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 3\alpha=0 \\ \gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

La famille est libre.

5. Il y a trois vecteurs $2v_1+v_2, v_1-3v_2, v_2-v_1$ dans le plan $Vect\left(v_1,v_2\right)$ donc ces trois vecteurs forment une famille liée, en rajoutant v_4 cela ne change rien, la famille est liée.

Exercice 4.

Comparer deux ensembles signifie que l'on doit trouver si l'un est inclus dans l'autre (ou réciproquement) ou si les ensemble sont égaux.

On va d'abord caractériser F à l'aide d'une (ou plusieurs) équation cartésienne, ensuite il sera simple de savoir si les vecteurs qui engendrent G sont dans F.

$u=(x,y,z,t)\in F \Leftrightarrow$ il existe α,β,γ réels tels que

$$u=\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,-2,3,-1)+\gamma(-5,-3,1,5)$$

α,β,γ sont donnés par les équations L_1, L_2 et L_4 donc

$$\begin{array}{l}
F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, -x+2y+z=0\right\} \\
-(-1)+2(-1)+1=0 \Rightarrow (-1,-1,1,-1)\in F \\
-4+2\times 1+2=0 \Rightarrow (4,1,2,4)\in F
\end{array}$$

Cela montre que $G\subset F$

Manifestement $\dim(G)=2$ car les deux vecteurs qui engendrent G ne sont pas colinéaires (donc ils forment une base de G).

Si on en savait plus on saurait que $\dim(F)=3$, mais on n'est pas censé le savoir. Il faut montrer que les trois vecteurs qui engendrent F sont libres, ils formeront une base et la dimension de F sera 3.

On reprend calcul de $u=\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,-2,3,-1)+\gamma(-5,-3,1,5)$ avec $u=(0,0,0,0)$

On trouve

$$\begin{cases} \alpha-\beta-5\gamma=x \\ -2\beta-3\gamma=y \\ 0=-x+z+2y \\ 10\gamma=-x+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta-5\gamma=0 \\ -2\beta-3\gamma=0 \\ 0=-0+0+2\times 0 \\ 10\gamma=-0+0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

C'est bon, $\dim(F)=3$.

$$F\subset G\dim(G)<\dim(F)\Rightarrow G\subsetneq F$$

Autrement dit G est inclus dans F mais G n'est pas égal à F.

Exercice 5.

$$c=2a-b\in \operatorname{Vect}(a,b)=E$$
$$d=a+3b\in \operatorname{Vect}(a,b)=E.$$

Donc $F\subset E$, or a et b ne sont pas proportionnels donc (a,b) est une base de E et $\dim(E)=2$, de même c et d ne sont pas proportionnels donc (c,d) est une base de F et $\dim(F)=2$.

J'ai passé sous silence que (a,b) est une famille génératrice de E et que (c,d) est une famille génératrice de F.

$$\begin{cases} E & \subset F \\ \dim(E) & =\dim(F) \end{cases} \Rightarrow E=F$$

Il y a d'autre façon de faire, par exemple en trouvant pour E et F une équation cartésienne caractérisant ces espaces.

Exercice 6.

1. $\dim(\operatorname{Vect}(v_1,v_2))\leq 2$ et $\dim(\operatorname{Vect}(v_3))=1$ donc la somme des dimensions n'est pas 4 , ces espaces sont peut-être en somme directe mais cette somme n'est pas $\mathbb{R}^4$, ils ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Remarque : en fait $\dim(\operatorname{Vect}(v_1,v_2))=2$ car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

2.

D'abord on va regarder si la famille (v_1,v_3,v_4) est libre, si c'est le cas la réponse sera non car la dimension de cet espace sera 3 et celle de $\operatorname{Vect}(v_2,v_5)$ est manifestement 2 , donc la somme des dimensions sera 5.

$$\begin{aligned} \alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_4 &= 0_{\mathbb{R}^4} \\ &\Rightarrow \alpha(1,0,0,1),+\beta(0,0,1,0)+\gamma(0,0,0,1)=(0,0,0,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ 0=0 \\ \beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(v_1, v_3, v_4) est une famille libre qui engendre $\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)$, c'est donc une base de cet espace donc $\dim(\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)) = 3$, comme v_2 et v_5 ne sont pas proportionnels, (v_2, v_5) est une famille libre qui engendre $\text{Vect}(v_2, v_5)$, c'est donc une base de cet espace et $\dim(\text{Vect}(v_2, v_5)) = 2$.

$$\dim(\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)) + \dim(\text{Vect}(v_2, v_5)) = 5 \neq \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$$

Donc ces espace ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires donc (v_1, v_2) est une famille libre qui engendre $\text{Vect}(v_1, v_2)$, c'est une base de cet espace et $\dim(\text{Vect}(v_1, v_2)) = 2$.

Manifestement $v_5 = v_3 + v_4, \text{Vect}(v_3, v_4, v_5) = \text{Vect}(v_3, v_4, v_3 + v_4) = \text{Vect}(v_3, v_4), v_3$ et v_4 ne sont pas colinéaires donc (v_3, v_4) est une famille libre qui engendre $\text{Vect}(v_3, v_4, v_5) = \text{Vect}(v_3, v_4)$ c'est donc une base de cet ensemble et $\dim(\text{Vect}(v_3, v_4, v_5)) = 2$.

$$\dim(\text{Vect}(v_1, v_2)) + \dim(\text{Vect}(v_3, v_4, v_5)) = 4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$$

Il reste à montrer que l'intersection de ces espaces est réduite au vecteur nul.

Ce coup-ci je vais détailler un peu plus. Soit $u \in \text{Vect}(v_1, v_2) \cap \text{Vect}(v_3, v_4)$, il existe α, β, γ et δ réels tels que :

$$u = \alpha v_1 + \beta v_2 \text{ et } u = \gamma v_3 + \delta v_4$$

Ce qui entraine que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma v_3 + \delta v_4 \Leftrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 - \gamma v_3 - \delta v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Cela montre que

$u = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est libre. Résultat que l'on utilise sans avoir à le montrer.

Mais ici, si on montre que la famille est libre, comme elle a 4 vecteurs, cela montrera que c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et que

$$\text{Vect}(v_1, v_2) \oplus \text{Vect}(v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$$

Mais dans cet exercice il fallait quand montrer qu'on y va:

$$\text{Vect}(v_3, v_4, v_5) = \text{Vect}(v_3, v_4, v_3 + v_4) = \text{Vect}(v_3, v_4)$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 - \gamma v_3 - \delta v_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(1, 0, 0, 1), +\beta(0, 0, 1, 0) - \gamma(0, 1, 0, 0) - \delta(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

Donc $u = \alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$ et $\text{Vect}\,(v_1, v_2) \cap \text{Vect}\,(v_3, v_4) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$
Comme la somme des dimensions est 4 on a:

$$\text{Vect}\,(v_1, v_2) \oplus \text{Vect}\,(v_3, v_4, v_5) = \text{Vect}\,(v_1, v_2) \oplus \text{Vect}\,(v_3, v_4) = \mathbb{R}^4.$$

Exercice 7.
1. $0 = 2 \times 0$ donc $0_{\mathbb{R}^2} \in E$.
Soient $u = (x, y) \in E, y = 2x$ et $u' = (x', y') \in E, y' = 2x'$
Pour tout λ et λ' deux réels

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') = (X, Y)$$
$$Y = \lambda y + \lambda' y' = \lambda 2x + \lambda' 2x' = 2\,(\lambda x + \lambda' x') = 2X$$

Donc $\lambda u + \lambda' u' \in E$. Ce qui montre que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $u = (2, 2, 0) \in F \,\text{car}\, y^2 = 2^2 = 2 \times 2 = 2x$ et $z = 0$
$2u = (4, 4, 0) y^2 = 4^2 = 16 \neq 2 \times 4 = 8$ donc $2u \notin F$ donc F n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 8.
1.
$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x_2, x_2, x_4, x_4) \\ x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$
$$x = (x_2, x_2, x_4, x_4) = x_2(1, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, 1, 1)$$

On pose $a = (1, 1, 0, 0)$ et $b = (0, 0, 1, 1)$
$E = \text{Vect}(a, b)$ ce qui entraine que $\{a, b\}$ est une famille génératrice de E, et d'autre part $\{a, b\}$ est une famille libre car ces vecteurs ne sont pas proportionnels, donc $\{a, b\}$ est une base de E.
2. Soit $c = (1, 0, 0, 0) \notin E$ car les composantes de c ne vérifient pas les équations caractérisant E. $\{a, b\}$ est libre dans E et $c \notin E$ donc $\{a, b, c\}$ est libre.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Vect}(a, b, c) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, x = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, 1) + \gamma(1, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $\text{Vect}(a, b, c) = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_4 - x_3 = 0\}$

Soit $d=(0,0,0,1), d \notin \operatorname{Vect}(a,b,c)$ car les composantes de d ne vérifient pas $x_3-x_4=0$.

$\{a,b,c\}$ est libre et $d \notin \operatorname{Vect}(a,b,c)$ donc $\{a,b,c,d\}$ est une famille libre, elle a 4 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9.

1. Le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est le polynôme nul, en 1 ce polynôme vaut 0 , le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est dans E.

Soit $P_1 \in E$ et $P_2 \in E$, donc $P_1(1)=0$ et $P_2(1)=0$.

Pour tout λ_1 et λ_2 deux réels,

$$\left(\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2\right)(1)=\lambda_1 P_1(1)+\lambda_2 P_2(1)=\lambda_1 \times 0+\lambda_2 \times 0=0$$

Donc $\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2 \in E$

E est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $P=aX^2+bX+c \in E$,

$$P(1)=0 \Leftrightarrow a \times 1^2+b \times 1+c=0 \Leftrightarrow c=-a-b$$

Donc

$$P=aX^2+bX-a-b=a\left(X^2-1\right)+b(X-1)$$

X^2-1 et $X-1$ sont deux polynômes non proportionnels, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de $E \cdot \dim(E)=2$.

Exercice 10.

1. Le polynôme nul Θ vérifie $\Theta(-1)=\Theta(1)=0$, donc $\Theta \in E$.

Soient P_1 et P_2 deux polynômes de E et soient λ_1 et λ_2 deux réels

$$\left(\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2\right)(-1)=\lambda_1 P_1(-1)+\lambda_2 P_2(-1)=0$$

Car $P_1(-1)=0$ et $P_2(-1)=0$,

$$\left(\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2\right)(1)=\lambda_1 P_1(1)+\lambda_2 P_2(1)=0$$

Car $P_1(1)=0$ et $P_2(1)=0$,

Donc $\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2 \in E$, ce qui montre que E est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$

2. -1 et 1 sont racines de P donc il existe Q tel que $P=(X-1)(X+1)Q=\left(X^2-1\right)Q$.

Le degré de Q est 1, donc il existe deux réels a et b tels que

$$P=\left(X^2-1\right)(aX+b)=aX\left(X^2-1\right)+b\left(X^2-1\right)$$

$\left(X\left(X^2-1\right), X^2-1\right)$ est une famille génératrice de E, ces polynômes ne sont pas proportionnels, ils forment dond une famille libre et donc une base de E.

Exercice 11.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x)+\beta \sin(2x)+\gamma \sin(3x)=0$$

Pour $x = \frac{\pi}{3}$,

$$\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \gamma \sin(\pi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) - \alpha \sin(2x) + \gamma \sin(3x) = 0$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \alpha \sin(\pi) + \gamma \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \gamma = \alpha$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) - \alpha \sin(2x) + \alpha \sin(3x) = 0$$

Pour $x = \frac{2\pi}{3}$

$$\alpha \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \alpha \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \alpha \sin(2\pi) = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Cette famille est libre.

Exercice 12.

Première méthode

$F \in \text{Vect}(f, g, h) \Leftrightarrow$ il existe α, β et γ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \alpha \cos(x) + \beta \cos(x)\cos(2x) + \gamma \sin(x)\sin(2x) \\ &= \alpha \cos(x) + \beta \cos(x)\left(1 - 2\cos^2(x)\right) + 2\gamma \sin^2(x)\cos(x) \\ &= \alpha \cos(x) + \beta \cos(x) - 2\beta \cos^3(x) + 2\gamma\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) \\ &= (\alpha + \beta + 2\gamma)\cos(x) + (-2\beta - 2\gamma)\cos^3(x) \end{aligned}$$

Donc $F \in \text{Vect}\left(\cos, \cos^3\right)$

$$\text{Vect}(f, g, h) = \text{Vect}\left(\cos, \cos^3\right)$$

Qui est évidemment un espace vectoriel de dimension 2.

Deuxième méthode

On cherche à savoir si la famille (f, g, h) est libre, si c'est le cas, il n'y a pas grand-chose à dire sur $\text{Vect}(f, g, h)$ sinon que c'est un espace de dimension 3.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cos(x) + \beta \cos(x)\cos(2x) + \gamma \sin(x)\sin(2x) = 0$$

Pour $x = \frac{\pi}{4}$

$$\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \beta \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \gamma \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 0$$

Pour $x = 0$

$$\alpha \cos(0) + \beta \cos(0)\cos(0) + \gamma \sin(0)\sin(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$$

Donc $\gamma = -\alpha$ et $\beta = -\alpha$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha\cos(x) - \alpha\cos(x)\cos(2x) + \alpha\sin(x)\sin(2x) = 0$$

Ensuite, on a beau chercher, pour toutes les valeurs de x particulière, on trouve $0 = 0$.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \alpha\cos(x) - \alpha\cos(x)\cos(2x) + \alpha\sin(x)\sin(2x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \alpha(\cos(x) - \cos(x)\cos(2x) + \sin(x)\sin(2x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \alpha(\cos(x)(1 - \cos(2x)) + \sin(x)2\cos(\mathrm{x})\sin(\mathrm{x})) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha\cos(x)\left(1 - \cos(2x) + 2\sin^2(x)\right) = 0
\end{aligned}$$

Car $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

La famille est donc liée, f et g ne sont pas proportionnelles donc la famille est libre et

$$\mathrm{Vect}(f, g, h) = \mathrm{Vect}(f, g)$$

Et $\dim(\mathrm{Vect}(f, g, h)) = 2$.