Université de Djilali Bounaama
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathémathique et Informatique

Année universitaire 2022/2023
Module:Analyse complexe
Deuxmière année maths

Corrigé de Série N=06

Corrigé 1. *1$^{\text{ère}}$méthode* :
Calculdesrésidus :$f(z)$=1$\frac{}{z^2(z^2-1)}$

- *pour* $z_0 = 0$ *est un pôle double (N=2).*

$$\begin{aligned} Res(f, z_0) &= \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^N f(z) \right)^{(N-1)}, \\ Res(f, 0) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \left((z)^2 \frac{1}{z^2(z^2-1)} \right)', \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{-2z}{(z^2-1)^2} = 0 \end{aligned}$$

- *pour* $z_0 = 1$ *est un pôle simple (N=1).*

$$Res(f, 1) = \frac{1}{0!} \lim_{z \to 1} \left((z-1) \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} \right)^{(0)} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{2}$$

- *pour* $z_0 = -1$ *est un pôle simple (N=1).*

$$Res(f, -1) = \frac{1}{0!} \lim_{z \to -1} \left((z+1) \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} \right)^{(0)} = \lim_{z \to -1} \frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{-1}{2}$$

2ème méthode:

1. *Le développement de Laurent de* f *au voisinage de* $z_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)} &= -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1-z^2}, \\ &= -\frac{1}{z^2} \sum_{n \geq 0} (z^2)^n, |z| \prec 1, \\ &= -\frac{1}{z^2} \left(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots \right), \\ &= \frac{-1}{z^2} - 1 - z^2 - z^4 - z^6 + \cdots . \end{aligned}$$

$z_0 = 0$ *est un pôle double,* $Res(f, 0) = b_1 = 0$

2. *Le développement de Laurent de* f *au voisinage de* $z_1 = 1$

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z+1}, \\ &= \frac{-1}{z^2} + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)}, \end{aligned}$$

Développons la fonction $\frac{1}{z+1}$ *en série de Laurent au voisinage de* 0.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{2(1+\frac{z-1}{2})}, \\ &= \frac{1}{2(1-\frac{1-z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n, \left|\frac{1-z}{2}\right| \prec 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-z}{2} + \frac{(1-z)^2}{4} + \cdots\right), \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1-z}{4} + \frac{(1-z)^2}{8} + \cdots\right), \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{z-1}{4} + \frac{(z-1)^2}{8} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Développons la fonction $\frac{1}{z}$ *en série de Laurent au voisinage de* 0.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n\geq 0}(1-z)^n, |1-z| \prec 1 \\ &= 1 + (1-z) + (1-z)^2 + (1-z)^3 + \cdots, \\ &= 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \cdots, \\ \frac{-1}{z^2} = \left(\frac{1}{z}\right)' &= -1 + 2(z-1) - 3(z-1)^2. \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{z^2} + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)} \\ &= \frac{1}{2(z-1)} + (-1 + 2(z-1) - \cdots) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{z-1}{4} + \cdots\right), \\ &= \frac{1}{2(z-1)} + \left(-\frac{5}{4} + \frac{17}{8}(z-1) - \frac{49}{16}(z-1)^2 + \cdots\right). \end{aligned}$$

alors $z_1 = 1$ *est un pôle simple et le* $Res(f, 1) = \frac{1}{2}$.

Corrigé 2. *1.Les points singuliers isolés sont $z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}, Res(f, k\pi) = 1$, et z_0 dans l'interieur de γ*

$$\oint_{|z|=1} \coth z dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_0) = 2\pi i$$

2.Soit $I_2 = \int_{|z|=2} ze^{\frac{3}{z}} dz$, on a

$$e^{\frac{3}{z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{3}{z}\right)^n}{n!} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{2z^2} + \cdots$$

ceci implique que

$$f(z) = ze^{\frac{3}{z}} = z + 3 + \frac{9}{2z} + \frac{27}{3!z^2} + \cdots$$

Alors $z_0 = 0$ est un point singulier essentiel et $Res(f, 0) = b_1 = \frac{9}{2}$, d'ou

$$I_2 = \int_{|z|=2} ze^{\frac{3}{z}} dz = 2\pi i Res(f, 0) = 2\pi i \frac{9}{2} = 9\pi i.$$

Corrigé 3. *1.Montrons que $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$*
Supposons que

$$\begin{cases} z & = & e^{i\theta}, \\ \sin\theta & = & \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dz & = & ie^{i\theta} d\theta. \\ \sin\theta & = & \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{2}\right) \end{cases}$$

ceci implique que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{-4zdz}{i\left(3z^2 - 10iz - 3\right)^2}$$

Les points singuliers isolés de $\frac{-4zdz}{i(3z^2-10iz-3)^2}$ sont $z_0 = \frac{i}{3}$ et $z_1 = 3i$, on a

$$\begin{cases} |z_0| \prec 1 & \Rightarrow & z_0 \in Int(\gamma), \\ |z_1| \succ 1 & \Rightarrow & z_1 \notin Int(\gamma). \end{cases}$$

Calculons $Res(f, \frac{i}{3})$

$$\begin{aligned} Res(f, \frac{i}{3}) &= \lim_{z\to\frac{i}{3}} \frac{d}{dz}\left((z - \frac{i}{3})^2 \frac{-4zdz}{(z-\frac{i}{3})^2(z-3i)^2}\right) \\ &= \lim_{z\to\frac{i}{3}} \frac{-4(z-3i)^2 + 8z(z-3i)}{(z-3i)^4}, \\ &= \lim_{z\to\frac{i}{3}} \frac{-4(z-3i) + 8z}{(z-3i)^3} = \frac{5}{64i}, \end{aligned}$$

Alors

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i) = 2\pi i Res(f, \frac{i}{3}) = 2\pi i (\frac{5}{64i}) = \frac{5\pi}{32}.$$

2.Montrons que $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)d\theta}{(5-4\cos\theta)} = \frac{\pi}{12}$
Supposons que

$$\left\{ \begin{array}{lll} z & = & e^{i\theta}, \\ \cos(3\theta) & = & \frac{1}{2}\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right), \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} dz & = & ie^{i\theta}d\theta. \\ \cos(3\theta) & = & \frac{1}{2}\left(\frac{z^6+1}{z^3}\right), \end{array} \right.$$

ceci implique que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)d\theta}{(5-4\cos\theta)} = \frac{1}{-4i} \oint_{|z|=1} \frac{z^6+1dz}{\left(z^3(z-\frac{1}{2})(z-2)\right)}$$

Les points singuliers isolés de $\frac{z^6+1dz}{\left(z^3(z-\frac{1}{2})(z-2)\right)}$ *sont* $z_0 = 0$ *est un pôle d'ordre* 3,$z_1 = \frac{1}{2}$ *est un pôle simple et* $z_2 = 2$ *est un pôle simple, on a*

$$\left\{ \begin{array}{lll} |z_0| \prec 1 & \Rightarrow & z_0 \in Int(\gamma), \\ |z_1| \prec 1 & \Rightarrow & z_1 \in Int(\gamma), \\ |z_2| \succ 1 & \Rightarrow & z_2 \notin Int(\gamma), \end{array} \right.$$

Calculons $Res(f,0), Res(f,\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{lll} Res(f,0) & = & \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^6+1}{z^2-\frac{5}{2}z+1}\right)'' = \frac{21}{4}, \\ Res(f,\frac{1}{2}) & = & \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\frac{z^6+1}{z^3(z-2)}\right) = \frac{-65}{12}. \end{array}$$

Alors

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)d\theta}{(5-4\cos\theta)} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i) = 2\pi i \left(Res(f,0) + Res(f,\frac{1}{2}) \right) = 2\pi i (\frac{21}{4} + \frac{-65}{12}) = \frac{\pi}{12}.$$

Corrigé 4. *1.Soit* $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}dx$ *posons* $x = z$ *ce qui implique* $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+4)^2}dx$ *nous avons*

$$\left\{ \begin{array}{lll} p(z) & = & 1, \\ q(z) & = & (z^2+4)^2, \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \deg(p(z)) & = & 0. \\ \deg(q(z)) & = & 4. \end{array} \right. \Longrightarrow \deg(p(z)) - \deg(q(z)) = 4 \succ 2$$

- *p et q sont premier entre eux.*

$$q(z) = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z_0 = 2i \vee z_1 = -2i$$

- *$q(z)$ n'a pas de zéro réel, $z_0 = 2i \in$ demi plan superieur, $z_0 = 2i \notin$ demi plan superieur.*

Calculons $Res(f, 2i)$:

$$\begin{aligned} Res(f, 2i) &= \lim_{z\to 2i} \left((z-2i)^2 f(z)\right)', \\ &= \lim_{z\to 2i} \left((z-2i)^2 \frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right)', \\ &= \lim_{z\to 2i} \left(\frac{-2}{(z+2i)^3}\right) = \frac{1}{32i}. \end{aligned}$$

Alors

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i) = 2\pi i \left(Res(f, 2i)\right) = 2\pi i (\frac{1}{32i}) = \frac{\pi}{16}.$$

2.Soit $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} dx$ posons $x = z$ ce qui implique $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+1)^n} dx$ nous avons

$$\begin{cases} p(z) = 1, \\ q(z) = (z^2+1)^n, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \deg(p(z)) = 0. \\ \deg(q(z)) = 2n. \end{cases} \Longrightarrow \deg(p(z)) - \deg(q(z)) = 2n \geq 2$$

- *p et q sont premier entre eux.*

$$q(z) = 0 \Rightarrow z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_0 = i \vee z_1 = -i$$

- *$q(z)$ n'a pas de zéro réel, $z_0 = i$ (pôle d'ordre n) située dans le demi plan superieur, $z_1 = -i \notin$ demi plan superieur.*

Calculons $Res(f, i)$:

$$\begin{aligned} Res(f, i) &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-i)^n f(z)\right), \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \left(\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(n-1)!(z+i)^{2n-1}}\right), \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{((n-1)!)^2(2i)^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Alors

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i) = 2\pi i \left(Res(f, i)\right) = 2\pi i \left(\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{((n-1)!)^2 (2i)^{2n-1}}\right).$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} dx = \frac{(2n-2)!\pi}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}}$$

Corrigé 5. *Soit l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} dx$.
posons $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}$, *on a deux pôles simples* $z_0 = -1+i$ *située dans le demi plan superieur* $(\Im(z_0) \succ 0)$ *et* $z_1 = -1-i \notin$ *demi plan superieur* $(\Im(z_1) \leq 0)$. *Calculons* $Res(f, -1+i)$:

$$\begin{aligned} Res(f, -1+i) &= \lim_{z \to -1+i} \left((z+1-i) f(z)\right), \\ &= \lim_{z \to -1+i} \left(((z+1-i)) \frac{e^{iz}}{(z-(-1+i))(z-(-1-i))}\right), \\ &= \frac{e^{i(-1+i)}}{(2i)} = \frac{e^{-1-i}}{2i}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2} dz = 2\pi i \frac{e^{-1-i}}{2i} = \pi e^{-1}(\cos(1) - i\sin(1)) = (\pi e^{-1}\cos(1)) - i(\pi e^{-1}\sin(1)).$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} dx = (-\pi e^{-1}\sin(1)).$$

De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2} dx = (\pi e^{-1}\cos(1)).$$