Université de Djilali Bounaama
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathémathique et Informatique

Année universitaire 2022/2023
Module:Analyse complexe
Deuxmière année maths

# Corrigé de Série N=01

**Corrigé 1.** (1)$\frac{3+i}{3-2i}=\frac{(3+i)(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{7}{13}+i\frac{9}{13}$

(2)$\frac{(2+i)(3+2i)}{(1-i)}=\frac{(4+7i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-3}{2}+i\frac{11}{2}$

(3) $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^4=\left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4)$i^n=\begin{cases}(-1)^k & , \quad n=2k.\\ (-1)^k i & , \quad n=2k+1.\end{cases}$

$$\begin{aligned}(1+i)^n+(1-i)^n &= \sqrt[n]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n+\sqrt[n]{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)^n.\\ &= \sqrt[n]{2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)+\sqrt[n]{2}\left(\cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)\right).\\ &= \sqrt[n]{2}\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)=2^{\frac{n}{2}}2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

**Corrigé 2.** 1.
*$w=x+iy$ la racine carrée du $a=5-12i \iff w^2=5-12i$, On a $a=5-12i$ alors* $|a|=13$

$$\begin{aligned}(x+iy)^2=5-12i \quad &\Rightarrow \quad x^2-y^2+2xyi=5-12i\\ &\Rightarrow \quad \begin{cases}x^2-y^2=5.\\ 2xy=-12. \quad \Rightarrow x=\pm 3\\ x^2+y^2=13\end{cases}\end{aligned}$$

*alors* $w=\pm 3\mp 2i$
2.
*Soit $w$ la racine d'ordre 3 du nombre complexe $b=1-i$*

$$\begin{aligned}w=\sqrt[3]{1-i} &= \left\{\sqrt{2}\left(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4})\right)\right\}^{\frac{1}{3}}\\ &= \sqrt[6]{2}\left\{\left(\cos(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})\right)\right\}, k=0,1,2.\end{aligned}$$

- *pour* $k = 0, z_0 = \sqrt[6]{2}\left\{\left(\cos(\frac{-\pi}{12}) + i\sin(\frac{-\pi}{12})\right)\right\}$

- *pour* $k = 1, z_1 = \sqrt[6]{2}\left\{\left(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})\right)\right\}$

- *pour* $k = 2, z_2 = \sqrt[6]{2}\left\{\left(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})\right)\right\}$

3. *La résolution de l'équation* $2iz^2 - 3z + 1 - 3i = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2i)(1-3i) = -15 - 8i$$

*Les racines de* $\Delta$ *sont* $\delta_{1,2} = x + iy$ *telle que*

$$\begin{aligned}(x+iy)^2 = -15 - 8i \quad &\Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 2xyi = -15 - 8i \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 - y^2 = -15. \\ 2xy = -8. \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = 17 \end{array}\right. \quad \Rightarrow x = \pm 1, y = \mp 4, \delta_{1,2} = \pm 1 \mp 4\end{aligned}$$

*Les racines de* $2iz^2 - 3z + 1 - 3i = 0$ *sont:*

$$z_1 = 1 - \frac{1}{2}i, z_2 = -1 - i$$

**Corrigé 3.** *Soit* $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{(x_1x_2) + i(y_2x_1) + i(y_1x_2) - (y_1y_2)} \\ &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_2x_1 + y_1x_2)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(y_2x_1 + y_1x_2) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1} \times \overline{z_2}\end{aligned}$$

2. $\begin{cases} |z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \\ |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \\ |z_2| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \cdots\cdots (1) \\ |z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| \cdots\cdots (2) \end{cases}$

*de* (1) *et* (2), *on trouve*

$$-(|z_1 - z_2|) \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

$$\begin{aligned} 3.\ |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \\ &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} \\ &= 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \end{aligned}$$

*4.Soit* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *alors* $|z|^n = r^n \cdots\cdots (1)$
*D'autre part* $z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ *alors* $|z^n| = r^n \cdots\cdots (2)$
*D'aprs* (1) *et* (2), *alors* $|z|^n = |z^n|, \forall n \in \mathbb{N}$

**Corrigé 4.** *Soit* $P(z)$ *un polynôme d'ordre* $n$ *à ceofficients réels;*

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n, a_n \neq 0, (a_i)_{i=0}^n \in \mathbb{R} \\ \overline{P(z)} &= \overline{a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n}, \\ &= a_0 + a_1 \overline{z_1} + \cdots + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + a_n \overline{z^n} \\ &= P(\overline{z}) \end{aligned}$$

*on va montrer que si* $P(z) = 0$ *équivalant que* $P(\overline{z}) = 0$.

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0 \Longleftrightarrow a_i = 0, \forall i = 0, \cdots, n. \cdots\cdots (1)$$

$$P(\overline{z}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z}^i = 0 \Longleftrightarrow a_i = 0, \forall i = 0, \cdots, n. \cdots\cdots (2)$$

*d'oú* $P(z) = 0 \Longleftrightarrow P(\overline{z}) = 0$

- *On déduit que si* $z$ *est une racine de* $P(z)$ *alors* $\overline{z}$ *l'est aussi, par conséquent si* $P(z)$ *est un polynôme á coefficients réels alors ces racines sont conjuguées deux a deux*

**Corrigé 5.**

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z - i| \leq 1\}$$

*On suppose que:* $z = x + iy$

$$\begin{aligned} |x + iy - i| \leq 1 &\iff \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \leq 1. \\ &\iff x^2 + (y-1)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

*L'ensemble* $E_1$ *est une Boule fermée de centre* $(0,1)$ *et de rayon* $1$ $B((0,1),1)$.

$$E_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1 &\iff |z-1| = |z+1|. \\ &\iff \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}. \\ &\iff (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2. \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

*L'ensemble* $E_2$ *est une équation de la droite* $(yy')$.

$$E_3 = \{z \in \mathbb{C}, |z - 2| \succ |z - 3|\}$$

$$\begin{aligned} |z-2| \succ |z-3| &\iff \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}. \\ &\iff (x-2)^2 + y^2 = (x-3)^2 + y^2. \\ &\iff 2x - 5 \succ 0. \\ &\iff x \succ \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

*L'ensemble* $E_3$ *c'est le demi plan ouvert délimité par la droite* $x = \frac{5}{2}$.

$$E_4 = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) \succ 0, |z| \prec 1\}$$

$|z| \prec 1$, *et* $\Im(z) \succ 0 \iff \sqrt{x^2 + y^2} \prec 1$ *et* $y \succ 0$

*L'ensemble* $E_4$ *c'est le demi disque (boule) ouvert superieur.*

$$E_5 = \left\{ z \in \mathbb{C}, \frac{1}{z} = \overline{z} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} = \overline{z} &\iff z\overline{z} = 1. \\ &\iff |z|^2 = 1. \\ &\iff (x-0)^2 + (y-0)^2 = 1. \end{aligned}$$

*L'ensemble $E_5$ c'est le Cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $1$.*

$$E_6 = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z|^2 = \Im z \right\}$$

$$\begin{aligned}
|z|^2 = \Im z &\iff |x+iy|^2 = y. \\
&\iff x^2 + y^2 - y = 0. \\
&\iff (x-0)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0. \\
&\iff (x-0)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

*L'ensemble $E_6$ c'est le Cercle de centre $(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.*