Université de Djilali Bounaama
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathémathique et Informatique

Année universitaire 2022/2023
Module:Analyse complexe
Deuxmière année maths

Corrigé de Série N=03

Corrigé 1. *Soit* $z = x + iy$*, on a* $\sin z = \sin(x + iy)$

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy)\\ &= \sin(x)\cos(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}) + \cos(x)\sin(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i})\\ &= \sin(x)\cosh(y) + \frac{-1}{i}\cos(x)\sinh(y)\\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy)\\ &= \cos(x)\cos(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}) - \sin(x)\sin(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i})\\ &= \cos(x)\cosh(y) - \frac{-1}{i}\sin(x)\sinh(y)\\ &= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)\end{aligned}$$

$$\sin z \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \vee \ \sinh y = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \ y = 0$$

$$\cos z \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x \sinh y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \ \vee \ \ \sinh y = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \vee \ \ y = 0$$

Corrigé 2. 1.*Soient* $z = x + iy$ *et* $\overline{z} = x - iy$*, alors l'équation* $2z + i\overline{z} = 3$ *devient*

$$2x + 2iy + ix + y = 3$$

$$\Rightarrow 2x + y + i(2y + x) = 3$$

Par identification, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& 3,\\ 2y+x &=& 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2,\\ y &=& -1.\end{array}\right.$$

Corrigé 3. *1.La résolution de l'́quation se ramène au calcul de la racine quatrième du nomre complexe i. Les racines sont donnés, pour $k = 0, 1, 2, 3$ par*

$$w_k = \sqrt[4]{1}\left[\cos(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4})\right]$$

par conséquent

$$\begin{aligned} w_0 &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right], \\ w_1 &= \left[\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right], \\ w_2 &= \left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right], \\ w_3 &= \left[\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)\right], \end{aligned}$$

2.L'équation est équivalente à

$$i(e^{iz})^2 - e^{iz} - i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

On pose $X = e^{iz}$ et on obtient

$$iX^2 - X - i = 0, X \in \mathbb{C}$$

On calcule le discriminent $\Delta = 1 - 4i(-i) = -3 = 3i^2$. Les solutions sont donnés par

$$X_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2i}, X_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2i}$$

Une réécriture conduit à

$$X_1 = \frac{-i - \sqrt{3}}{2}, X_2 = \frac{-i + \sqrt{3}}{2i}$$

La résolution en terme de la variable z donne

$$z_1 = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{-i - \sqrt{3}}{2}\right), z_2 = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{-i + \sqrt{3}}{2}\right)$$

Corrigé 4. 1.*On a l'équation suivante,*

$$e^z = 1 + i$$

$$\begin{aligned} e^z = 1 + i \quad &\Rightarrow \log e^z = \log 1 + i, \\ &\Rightarrow \quad z = \ln|1 + i| + i\left(\arg(1 + i) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}, \\ &\Rightarrow \quad z = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

2.*On a l'équation suivante,*

$$\cos z = 3 + 2e^{i}$$

Nous avons

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 3 + 2e^{iz} \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 6 + 4e^{iz} \Rightarrow 3e^{2iz} + 6e^{iz} - 1 = 0$$

On pose $X = e^{iz}$ alors on a

$$X^2 + 6X - 1 = 0$$

Les solutions de cette l'équation sont

$$X_1 = -3 + \sqrt{6}, X_2 = -3 + \sqrt{6}$$

Ainsi

$$e^{iz_1} = -3 + \sqrt{6}, e^{iz_2} = -3 + \sqrt{6}$$

$\Rightarrow$

$$iz_1 = \log -3 + \sqrt{6}, iz_2 = \log -3 + \sqrt{6}$$

$\Rightarrow$

$$z_1 = \frac{1}{i}(\ln\left|-3 + \sqrt{6}\right| + i\pi + 2k\pi), z_2 = \frac{1}{i}(\ln\left|3 + \sqrt{6}\right| + i\pi + 2k^{'}\pi), k, k^{'} \in \mathbb{Z}$$

Corrigé 5. *Par définition, nous avons*

$$2\cos(z) - e^{-iz} = 1 + 2i \Rightarrow 2\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} - e^{-iz} = 1 + 2i$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} e^{iz} = 1 + 2i \quad &\Rightarrow \quad iz = \log(1 + 2i), \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{1}{i}\log(1 + 2i) = \frac{1}{i}(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)), k \in \mathbb{Z}, \\ &\Rightarrow \quad z = -i\ln(\sqrt{5}) + \arctan(2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$