
Corrigé de Série N=04

Corrigé 1. 1.*Soit*

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = Re^{it}\end{aligned}$$

Supposons que

$$\begin{aligned}\gamma(t) = x + iy = Re^{it} &= R(\cos t + i \sin t) \\ \Rightarrow \begin{cases} x &= R \cos t \\ y &= R \sin t \end{cases} &\implies \begin{cases} x^2 &= R^2 \cos^2 t \\ y^2 &= R^2 \sin^2 t \end{cases}\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$$

Alors $\gamma(t)$ le paramétrage d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R .

2.*Soit*

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = Re^{it}\end{aligned}$$

Supposons que

$$\gamma(t) = x + iy = t + it^2, t \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x &= t \\ y &= t^2 \end{cases}$$

Ce qui implique

$$y = x^2, x \geq 0$$

Alors $\gamma(t)$ est un parabole.

3.*Soit*

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = Re^{it}\end{aligned}$$

Supposons que

$$\gamma(t) = x + iy = t + i\frac{1}{t}, t \geq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x &= t \\ y &= \frac{1}{t} \end{cases}$$

Ce qui implique

$$y = \frac{1}{x}, x \geq 1$$

Corrigé 2. 1. Soit γ_1 le segment $[A, B]$, $A(0, -1)$, $B(0, 1)$

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma_1(t) = (1-t)A + tB = i(2t-1) \end{aligned}$$

calculons l'intégrale $\int_{\gamma_1} |z| dz$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} |z| dz &= \int_0^1 2i |2t-1| dt, \\ &= 2i \int_0^1 |2t-1| dt, \\ &= 2i \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1) dt \right), \\ &= 2i \left([t-t^2]_0^{\frac{1}{2}} + [t^2-t]_{\frac{1}{2}}^1 \right) \\ &= 2i \left(\frac{1}{2} \right) = i \end{aligned}$$

2. Soit γ_2 est le demi cercle, $|z| = 1$, $\Re(z) \geq 0$ reliant le point $(0, -1)$ au point $(0, 1)$

$$\begin{aligned} \gamma_2 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma_2(t) = Re^{it} = e^{it} \end{aligned}$$

calculons l'intégrale $\int_{\gamma_2} |z| dz$

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_2} |z| dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\gamma_2(t)| \gamma_2'(t) dt, \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i e^{it} |e^{it}| dt, \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i e^{it} = [e^{it}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}, \\
 &= e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2i
 \end{aligned}$$

Corrigé 3. Soit γ est le segment reliant le point $(0,0)$ au point $(0,1)$

$$\begin{aligned}
 \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\
 t &\longrightarrow \gamma(t) = (1-t)O + tA = it
 \end{aligned}$$

calculons l'intégrale $\int_{\gamma} z \sin z dz$

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} |z| dz &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt, \\
 &= \int_0^1 i (it \sin(it)) dt = - \int_0^1 (t \sin(it)) dt, \\
 &= - \left(\frac{-t}{i} [\cos(it)]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{i} \cos(it) dt \right), \\
 &= \left[\frac{t}{i} \cos(it) - \sin(it) \right]_0^1, \\
 &= \left[\frac{1}{i} (t \cos(it) - i \sin(it)) \right]_0^1, \\
 &= \frac{1}{i} (\cos(i) - i \sin(i)) = \frac{1}{i} (\cos(-i) + i \sin(-i)), \\
 &= \frac{1}{i} e^{i(-i)} = \frac{1}{i} e^1
 \end{aligned}$$

Corrigé 4. 1. Soit $\gamma_1 : |z+i| = 3$ est le cercle de centre $(0,-1)$ et de rayon 3, La fonction $f(z) = \sin z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors elle est holomorphe sur γ_1 et à l'intérieur de γ_1 , $z_0 = -i$ est à l'intérieur de γ_1 , alors d'après la formule d'intégrale

de cauchy:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z+i} dz &= f(z_0)2\pi i, \\ &= \sin(-i)2\pi i, \\ &= \sinh(1)2\pi, \end{aligned}$$

2. Soit $\gamma_2 : |z| = 2$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2, on a

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2-i^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i} \right)$$

$f(z) = i$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors elle est holomorphe sur γ_2 et à l'intérieur de γ_2 , $z_0 = i$ et $z_0 = -i$ sont à l'intérieur de γ_2 , alors d'après la formule d'intégrale de cauchy:

$$\begin{aligned} I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+1} dz &= \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma_2} \frac{i}{z-i} dz - \int_{\gamma_2} \frac{i}{z+i} dz \right), \\ &= \frac{1}{2} [2\pi i f(i) - 2\pi i f(i)], \\ &= \frac{1}{2} [2\pi i(i) - 2\pi i(i)] = \frac{1}{2} (2\pi - 2\pi) = 0 \end{aligned}$$

3. Soit $\gamma_3 : |z+1| = 1$ est le cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon 1, on a $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors elle est holomorphe sur γ_3 et à l'intérieur de γ_3 , $z_0 = -1$ est à l'intérieur de γ_3 , alors d'après la formule d'intégrale de cauchy:

$$\begin{aligned} I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{\frac{1}{(z-1)^3}}{(z+1)} dz &= f(-1)2\pi i, \\ &= \frac{-1}{8}2\pi i = \frac{-1}{4}i\pi, \end{aligned}$$

4. Soit $\gamma_4 : |z-i| = 1$ est le cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1, on a $f(z) = \cos z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors elle est holomorphe sur γ_4 et à l'intérieur de γ_4 , $z_0 = i$ est à l'intérieur de γ_4 , alors d'après la formule d'intégrale de cauchy pour les dérivées:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma_4} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

pour $n = 1$, on obtient

$$f^{(1)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_4} \frac{\cos z}{(z-i)^2} dz$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} I_4 = \oint_{\gamma_4} \frac{\cos z}{(z-i)^2} dz &= \frac{2\pi i}{1} f^{(1)}(i), \\ &= 2\pi i \sin(i), \\ &= 2\pi \sinh(1) \end{aligned}$$