Université de Djilali Bounaama
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathémathique et Informatique

Année universitaire 2022/2023
Module:Analyse complexe
Deuxmière année maths

Corrigé de Série N=05

Corrigé 1. *1.Soit la série* $\sum_{n\geq 0} n^\alpha z^n, \alpha \in \mathbb{R}$ *on a* $a_n = n^\alpha$

$$\left|\frac{(n+1)^\alpha}{(n)^\alpha}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = 1$$

ce qui implique $R = 1$.
2.Soit la série $\sum_{n\geq 1} n!\left(\frac{z}{n}\right)^n$, *on a* $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}\right| = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

ce qui implique $R = e$.
3.Soit la série $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, *on a* $a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow x^n e^{-1} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

$$\int_0^1 x^n e^{-1} dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\frac{e^{-1}}{n+1} \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\sqrt[n]{\frac{e^{-1}}{n+1}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{-1}}{n+1}} \leq \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$$

$$1 \leq \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$$

ce qui implique $R = 1$.

Corrigé 2. *1.Soit la fonction* $f_1(z) = \frac{1}{z^4-z^2} = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$ *les points singuliers isols sont:*$z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = -1$.
pour $z_0 = 0$,

$$\lim_{z_0\to 0}(z-0)^2 f(z) = \lim_{z_0\to 0}\frac{z^2}{z^2(z^2-1)} = -1 \neq 0.$$

$$\lim_{z_0\to 0}(z-0)^3 f(z) = \lim_{z_0\to 0}\frac{z^3}{z^2(z^2-1)} = 0.$$

ce qui implique que $z_0 = 0$ *est un pôle double pour* $z_1 = 1$,

$$\lim_{z_1\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z_1\to 1}\frac{(z-1)}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

$$\lim_{z_1\to 1}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z_1\to 1}\frac{(z-1)^2}{z^2(z-1)(z+1)} = \lim_{z_1\to 1}\frac{(z-1)}{z^2(z+1)} = 0.$$

ce qui implique que $z_1 = 1$ *est un pôle simple. pour* $z_2 = -1$,

$$\lim_{z_2\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z_2\to -1}\frac{(z+1)}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{-1}{2} \neq 0.$$

$$\lim_{z_2\to -1}(z+1)^2 f(z) = \lim_{z_2\to -1}\frac{(z+1)^2}{z^2(z-1)(z+1)} = \lim_{z_2\to -1}\frac{z+1}{z^2(z-1)} = 0.$$

ce qui implique que $z_2 = -1$ *est un pôle simple.*
2.Soit la fonction $f_2(z) = \coth z$ *les points singuliers isolés sont:*$z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z) = \lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Supposons que $w = z - k\pi \Rightarrow w \to 0$ *quand* $z \longrightarrow k\pi$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z) &= \lim_{w\to 0} w\frac{\cos(w+k\pi)}{\sin(w+k\pi)},\\
&= \lim_{w\to 0} w\frac{(-1)^k\cos(w)}{(-1)^k\sin(w)},\\
&= \lim_{w\to 0} \frac{\cos(w)}{\frac{\sin(w)}{w}} = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_k}(z-z_k)^2 f(z) &= \lim_{w\to 0} w^2\frac{\cos(w+k\pi)}{\sin(w+k\pi)},\\
&= \lim_{w\to 0} w^2\frac{(-1)^k\cos(w)}{(-1)^k\sin(w)},\\
&= \lim_{w\to 0} w\frac{\cos(w)}{\frac{\sin(w)}{w}} = 0
\end{aligned}$$

ce qui implique que $z_k = k\pi$ sont des pôles simples, et $Res(f, k\pi) = 1$.

3.Soit la fonction $f_3(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$ les points singuliers isols sont:$z_0 = 0, z_1 = 1$.
pour $z_1 = 1$,

$$\lim_{z_1 \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z_1 \to 1} (z-1) \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1} = e \neq 0.$$

$$\lim_{z_1 \to 1} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z_1 \to 1} (z-1)^2 \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1} = 0.$$

ce qui implique que $z_1 = 1$ est un pôle simple.
pour $z_0 = 0$, on a $f_3(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}, |z| \prec 1$

$$\begin{aligned} f_3(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1} &= \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^n}{n!} \right) \left(-\sum_{n \geq 0} z^n \right), \\ &= \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2! z^4} + \cdots \right) \left(-1 - z - z^2 + \cdots \right), \\ &= \left(-1 - z - z^2 + \cdots \right) + \frac{1}{z^2} \left(-1 - z - z^2 + \cdots \right) + \frac{1}{2! z^4} \left(-1 - z - z^2 + \cdots \right) + \cdots \end{aligned}$$

$b_n \neq 0$ et la partie principale est infinie ceci implique que $z_0 = 0$ est un point singulier essentiel.

Corrigé 3. *Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$, Si $|z| \prec 3$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{z-3} = \frac{1}{3z} \frac{1}{\frac{z}{3} - 1} = \frac{-1}{3z} \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \frac{-1}{3z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{3} \right)^n.$$

Si $|z| \succ 3$, on a

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{z-3} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - \frac{3}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{z} \right)^n.$$

Corrigé 4. *1.La fonction*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+2} = \frac{az + 2a + bz - b}{(z-1)(z+2)} = \frac{(a+b)z + 2a - b}{(z-1)(z+2)}$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a + b &=& 1, \\ 2a - b &=& 0, \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a &=& \frac{1}{3}. \\ b &=& \frac{2}{3}. \end{array} \right.$$

ceci implique que

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z+2}\right].$$

2.Le développement de la fonction f(z) en série de Laurent autour de 0 *se fait comme suit :*

- *Si* $|z| \prec 1$, *nous avons*

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{2}{\frac{z}{2}+1}\right] = \frac{1}{3}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right]$$

- *Si* $1 \prec |z| \prec 2$, *nous avons*

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{2}{1+\frac{z}{2}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right]$$

- *Si* $2 \prec |z| \prec +\infty$, *nous avons*

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{2}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n\right].$$

Corrigé 5. *Soit la fonction* $f(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$, *les singularités de f satisfont* $z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0$. *Aprés calcul, nous trouvons deux singularités* $z_0 = \frac{1}{2}$ *et* $z_1 = 2$ *on a*

$$f(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{z^2-\frac{5}{2}z+1} = \frac{-1}{i}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}$$

En effet pour $z_0 = \frac{1}{2}$ *on a*

$$f(z) = \frac{\frac{-1}{i}\frac{1}{(z-2)}}{(z-\frac{1}{2})}$$

Soit $\Phi(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{(z-2)}$. *Nous avons* $\Phi(\frac{1}{2}) \neq 0$. *Ainsi,* z_0 *est un pôle simple (d'ordre* 1*).*

pour $z_1 = 2$ *on a*

$$f(z) = \frac{\frac{-1}{i}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})}}{(z-2)}$$

Soit $\Phi(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})}$. *Nous avons* $\Phi(2) \neq 0$. *Ainsi,* z_1 *est un pôle simple (d'ordre* 1*).*