Université de Djilali Bounaama
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathémathique et Informatique

Année universitaire 2022/2023
Module:Analyse complexe
Deuxmière année maths

Série N=01

Exercice 1. *Mettre sous la forme $x + iy$, x, y réels, les expressions suivantes:*

$(i)\dfrac{3+i}{3-2i}, (ii)\dfrac{(2+i)(3+2i)}{1-i}, (iii)(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^4, (iv)\ i^n, n \in N, (v)\ (1+i)^n+(1-i)^n, n \in \mathbb{N}$

Exercice 2. *1. Trouver la racine carrée du nombre complexe $a = 5 - 12i$.*

2. *Trouver la racine d'ordre 3 du nombre complexe $b = 1 - i$.*
3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $2iz^2 - 3z + 1 - 3i = 0$.*

Exercice 3. *Montrer que, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.
2. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
3. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.
4. $|z|^n = |z^n|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. *Soit $P(z)$ un polynôme d'ordre n à coefficients réels;*

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{P(z)} = P(\overline{z})$ et $P(z) = 0 \Leftrightarrow P(\overline{z}) = 0$. Que deduire?

Exercice 5. *Décrire les sous-ensembles $z \in \mathbb{C}$ déterminés par les conditions suivantes:*

(1) $|z - i| \leq 1$, (2) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$, (3) $|z - 2| \succ |z - 3|$, (4) $\Im(z) \succ 0, |z| \prec 1$, (5) $\frac{1}{z} = \overline{z}$,

(6) $|z|^2 = \Im(z)$.