Module : Analyse Complexe
Eenseignante : Fouzia Chita
Chapitre "6 " : Théorème des résidus et ses applications

L'une des applications les plus remarquables de l'intégration dans le plan complexe en général et du théorème de Cauchy en particulier, est la possibilité d'utiliser les techniques d'analyse complexe pour calculer des intégrales et des séries réelles qui sont très difficiles à calculer par les méthodes d'analyse réelle.

0.1 Théorème des résidus.

Définition 1 *Soit f une fonction holomorphe sur U et z_0 un pôle de f. On appelle **résidu** de f en z_0 et l'on note $Res(f,z_0)$ le coefficient b_1 de $\frac{1}{z-z_0}$ dans le développement de Laurent de f en z_0*

$$b_1 = Res(f,z_0) = \oint_C f(z)dz, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Remarque 1 *D'aprés le théorème de Laurent, la fonction f admet un développement en série de Laurent centré en z_0.*

$$f(z) = ... + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + ...$$

Où

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

En particulier pour $n = -1$, on trouve

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(w)dw = Res(f,z_0).$$

Ainsi peut être obtenu directement du développement de f en série de Laurent.

0.2 Calcul des résidus.

Théorème 1 *Si z_0 est un pole d'ordre N pour f, alors*

$$Res(f,z_0) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} [(z-z_0)^N f(z)]$$

En particulier si z_0 est un pole simple de f, on a

$$Res(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$$

Exemple 1 *Soit la fonction $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2}$, on a $z_0 = -1$ est un pôle double d'ordre $N = 2$.*

$$\begin{aligned} Res(f,-1) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to -1} \left((z+1)^2 \frac{z^2-2z}{(z+1)^2} \right)' \\ &= \frac{1}{1!} \lim_{z \to -1} (2z-2) = -4. \end{aligned}$$

Théorème 2 (théorème des résidus de Cauchy) *Soient C un conteur simple ferm et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ un nombre fini de points singuliers tous l'intrieur de C, f une fonction holomorphe sur C, alors*

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

L'intégrale étant calculée dans le sens positif, C parcouru une fois .

Exemple 2 *Calculons l'intégrale $\oint_C \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)}dz$, où C est le cercle $|z| = \frac{2}{3}$.*
La fonction $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)}$ a deux pôles simples $z_1 = 0$ et $z_2 = \frac{1}{2}$, situés l'intérieur de C, pour z_2 on a

$$Res(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2}) \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)} = \frac{1}{2} \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{\log(z+1)}{z^2} = 2 \log \frac{3}{2}$$

Pour z_1 on a

$$\lim_{z \to 0} z \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)} = \lim_{z \to 0} \frac{\log(z+1)}{z} \frac{1}{2z-1} = 1 \times \frac{1}{2 \times 0 - 1} = -1 = Res(f, 0).$$

Ainsi

$$\oint_C \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)}dz = 2\pi i \left[Res(f, 0) + Res(f, \frac{1}{2}) \right] = 2\pi i \left[-1 + \log \frac{3}{2} \right]$$

.

0.3 Applications au calcul et à la sommation des séries

0.3.1 Les fonctions périodique entre 0 et 2π

Soit $I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ où F est une fonction rationnelle de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, Si on pose

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right). \end{cases}$$

L'intégrale I devient

$$I = \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

où C est le cercle d'unité et z_k sont les pôles de f à intérieur de C.
Exemple 3 *Calculons $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}d\theta$ posons*

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

I devient

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \frac{1}{3-2(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right))+(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right))}\frac{dz}{iz} \\ &= \int_\gamma \frac{2}{z^2(1-2i)+6iz-(1+2i)}dz. \end{aligned}$$

Les pôles sont $z_1 = 2-i \notin \gamma$ $z_2 = \frac{1}{5}(2-i) \in \gamma$

$$\begin{aligned} Res(f,z_2) &= \lim_{z\to z_2}\left((z-z_2)\frac{2}{(1-2i)(z-z_1)(z-z_2)}\right) \\ &= \frac{1}{2i} \end{aligned}$$

alors, d'aprés le théorème des résidus I=2iπRes(f,z₂) $= \pi^2$

Certains types d'intégrales généralisées:

Définition 2 *On dit que f est d'ordre $\frac{1}{|z|^p}$, $p \in \mathbb{R}$ s'il existe une constante $k > 0$, telle que : $|f(z)| \le \frac{k}{|z|^p}$, pour $|z|$ assez grand.*

Théorème 3 *Supposons que f admet un nombre fini de pôles sur le demi plan supérieur et qu'elle est holomorphe sur tout l'axe réel.*
Supposons aussi que f est d'ordre $\frac{1}{|z|^p}$, $p \in \mathbb{R}$ alors:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k)$$

Ou les z_k sont les pôles de f dans le demi plan supérieur.

Théorème 4 *Si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ou P et Q sont deux polynômes premiers entre eux et $Q(z)$ n'a pas de zéro réels.*
Si $deg(Q) - deg(P) \ge 2$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k)$$

Ou les z_k sont les pôles situées dans le demi plan supérieur.

Remarque 2 *Si $f(x)$ est paire*

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)ds = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k)$$

Exemple 4 *Calculons l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx$.*

Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$, les pôles situées dans le demi plan supérieur $z_1 = i$ pôles d'ordre 2 et $z_2 = -1+i$, pôle simple.

$Res(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}((z-i)^2 f(z)) = \frac{9i-12}{100}$.

$Res(f,-1+i) = \lim_{z\to -1+i}(z-(-1+i)(f(z)) = \frac{3-4i}{25}$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i(\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25}) = \frac{7\pi}{50}$.

Théorème 5 *Soit* $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *ou* P *et* Q *sont deux polynômes premiers entre eux et* $Q(z)$ *n'a pas de zéro réels et si* $deg(Q) > deg(P)$, $m > 0$, *alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(fe^{imz}, z_k)$$

Ou les z_k*sont les pôles de* $f(z)e^{imz}$ *situées dans le demi plan supérieur.*

Remarque 3 *Les poles de* $f(z)e^{imz}$ *ne sont autre que les racines de* $Q(z) = 0$, *dans le demi plan supérieur ce qui permet de calculer intégrales:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx$$

.

Exemple 5 *Calculer:* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^+4)dx}$.
les pôles sont: $z_1 = i, z_2 = 2i, m = 1$ *posons* $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ *En calculant les rsudus de la fonction* $f(z)$, *on obtient*

$$Res(f,i) = \frac{1}{6e}, Res(f,2i) = \frac{-1}{6e^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)dx} = 2\pi i(Res(f,i) + Res(f,2i)) = \frac{\pi i}{3e^2}(e-1)$$

d'où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)dx} = \frac{\pi(e-1)}{3e^2}$$

0.4 Exercices

Execice 1 *déterminer la nature des points singuliers puis calculer les résidus de* $\frac{1}{z^4-z^2}, \coth z, \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$.

Execice 2 *Appliquer le théorème des résidus pour calculer les intégrales suivants:*

$$(1) \int_{|z|=1} \coth z dz, (2) \int_{|z|=2} ze^{\frac{z}{3}} dz$$

Execice 3 *Montrer que:*

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}, \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{12},$$

Execice 4 *Calculer:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}, n \geq 2.$$

Execice 5 *Calculer:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2} dx$$

0.4.1 Exercices Supplmentaires

Execice 6 *On considère la fonction* $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$

1. *Trouver les résidus de f(z) en tous les pôles.*

2. *Par application du théorème des résidus, calculer* $\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)}dz$ *où* C *désigne le cercle* $|z| = \frac{3}{2}$ *dans le sens direct.*

Execice 7 *On considère la fonction* $f(z) = \frac{-z}{(z-2)(z-3)}$

1. *Trouver les résidus de f(z) en tous les pôles.*
2. *Par application du théorème des résidus, calculer* $\int_C \frac{-z}{(z-2)(z-3)}dz$ *où* C *désigne le cercle* $|z| = 4$ *dans le sens direct.*

Execice 8 *On considère la fonction* $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$

1. *Trouver les résidus de f(z) en tous les pôles.*
2. *Par application du théorème des résidus, calculer* $\int_C \frac{2z}{z^2+1}dz$ *où* C *désigne le cercle* $|z| = 2$ *dans le sens direct.*

Execice 9 *On considère la fonction* $f(z) = \frac{1}{2z^2+5iz-2}$

1. *Trouver les résidus de f(z) en tous les pôles.*
2. *Par application du théorème des résidus, calculer* $\int_C \frac{1}{2z^2+5iz-2}dz$ *où* C *désigne le cercle* $|z| = 1$ *dans le sens direct.*