Module : Analyse Complexe
Eenseignante : Fouzia Chita
Chapitre "5 " : Développement en série Taylor et en série de Laurent

0.1 Développement en série Taylor

0.1.1 Sries de fonctions

À partir d'une suite de fonctions $\{u_n(z)\}$, nous formons une nouvelle suite $\{S_n(z)\}$ définie par

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$$

où $S_n(z)$ est appelée la n^{ieme} somme partielle , qui est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n(z)\}$ La suite $S_n(z)$ est représentée par

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(z),$$

appelée série infinie de terme génral $u_n(z)$. Si $lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$, la série est dite convergente et $S(z)$ est sa somme, dans le cas contraire la srie est dite divergente.

Définition 1 *Une série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$ est dite absolument convergente si la série des valeurs absolues, i.e, $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(z)|$ converge.*

Définition 2 *Si $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(z)|$ est convergente alors, i.e, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$ convergente.*

0.1.2 Séries entières

Une série entîre centrée en $z = z_0$ est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{1}$$

Remarque 1
1. *Les polynômes sont un cas spécial de séries entières, et convergent pour tout $z \in \mathbb{C}$.*
2. *La série géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ est un cas spécial de séries entières, o $c_k = 1$ pour tout k.*

Proposition 1 *Considérons la série géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$.*
1. *La série converge absolument pour $|z| \prec 1$ vers la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$.*
2. *La série converge uniformment pour $|z| \leq r \prec 1$ vers la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$.*
3. *La série diverge pour $|z| \geq 1$*

Démonstration. Notons que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$$

Puisque $|z| \prec 1$, alors
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} z^{n+1} = \lim_{n\longrightarrow\infty} |z|^{n+1} e^{i(n+1)\arg z} = 0$$
Soit $0 \prec r \prec 1$ et $|z| \leq r$, alors $\left|z^k\right| \leq r^k$ et daprs le thorme (M-test de Weierstrass) la srie $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ converge absolument et uniformément pour $|z| \leq r$. Puisque r peut être arbitrairement proche de 1 on a que la série est absolument convergente pour $|z| \prec 1$.

Corollaire 1 *Si $z_0 \in \mathbb{C}$, alors pour tout $z \in D(z_0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \prec 1\}$,*
$$\sum_{k=m}^{+\infty} (z - z_0)^k = \frac{(z - z_0)^m}{1 - (z - z_0)}, m \geq 0$$

Exemple 1 *Trouver la somme de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1+2i)^k}{5^k}$ si elle existe.* ***Solution.****La série est géométrique de raison $r = \frac{1}{5}(1 + 2i)$. Puisque $|z| = \frac{\sqrt{5}}{5} \prec 1$, la série converge absolument et sa somme est*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1 + 2i)^k}{5^k} = \frac{\frac{1+2i}{5}}{1 - \frac{1+2i}{5}} = \frac{1 + 2i}{4 - 2i} = \frac{1}{2}i.$$

Question: Quel est le domaine de convergence de la série entière (5.1)?
Rponse: Si on utilise le test de **d'Alembert**, la série entière converge absolument si
$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \left|\frac{c_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{c_k(z - z_0)^k}\right| = |z - z_0| \lim_{k\longrightarrow\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| \prec 1.$$
Notons
$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = L, \;\; et \;\; R = \frac{1}{L} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$$
alors, la série entière (5.1) converge absolument dans le domaine $|z - z_0| < R$. Le nombre R est appelé le rayon de convergence de la série.
Si on utilise le test de **Cauchy**, la srie entire converge absolument si
$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \sqrt[k]{|c_k|\,|(z - z_0)^k|} = \lim_{k\longrightarrow\infty} |z - z_0| \sqrt[k]{|c_k|} \prec 1$$
donc si on note $L = lim_{k\longrightarrow\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ le rayon de convergence peut être défini de maniŕe équivalente par :
$$R = \frac{1}{L} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}$$
.

Remarque 2
1. *Toute série entière admet un rayon de convergence unique R, $0 \leq R \leq \infty$.*
2. *Si $L = 0$, alors $R = \infty$ et la série (5.1) converge absolument pour $z \in \mathbb{C}$.*
3. *Si $L \neq 0$, alors la série (5.1) converge absolument dans le disque ouvert (domaine) $D(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ et diverge dans*
$$\mathbb{C} - D(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \succ R\}$$
.

4. *Si $L = \infty$ alors $R = 0$ et la série (5.1) converge seulement pour $z = z_0$ et diverge dans $\mathbb{C}\{z_0\}$*

5. *Pour les points sur le cercle $|z - z_0| = R$, la série peut converger et peut diverger.*

Théorème 1 *Pour toute série entière $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, il existe un nombre positif R, avec $0 \leq R \leq \infty$, qui dépend seulement des coefficients c_k, tel que*

1. *la série converge absolument dans $|z - z_0| \prec R$,*

2. *la série converge uniformément dans $|z - z_0| \leq R' \prec R$,*

3. *la série diverge dans $|z - z_0| \succ R$.*

Exemple 2 *Étudier la convergence de la série: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ Le rayon de convergence est donn par,*

$$R = \lim_{k \longrightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$$

Donc la série est absolument convergente dans le domaine $|z| \prec 1$. Notons que si $|z| = 1$, alors

$$\left| \frac{z^k}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2}$$

mais puisque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ converge absolument sur le cercle $|z| = 1$ et donc la série converge absolument dans le disque fermé $|z| \leq 1$

0.1.3 Série de Taylor

Théorème 2 *(Série de Taylor) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de C, soient $z_0 \in U$ et $R > 0$ tel que le cercle $C(z_0,R) \subset U$, alors*

$$\forall z \in D(z_0,R) : f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

La série précédante est appelée série de Taylor de f centrée en z_0. Si le centre $z_0 = 0$ alors la série devient

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Théorème 3 *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique (holomorphe) dans le domaine D. Alors f est développable en une série entière*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$$

avec

$$c_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw$$

ou $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ est le plus grand cercle de centre z_0 et de rayon R orienté positivement inclus dans D.

0.1.4 Quelques séries particulières:

La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence

1 . $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots ; |z| \prec +\infty.$

2 . $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots ; |z| \prec 1.$

3 . $\sin z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots ; |z| \prec +\infty$

4 . $\cos z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots ; |z| \prec +\infty.$

5 . $\ln z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots ; |z| \prec 1.$

6 . $\arctan z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \cdots ; |z| \prec 1.$

0.2 Développement en série de Laurent

Nous allons généraliser la série de Taylor en développant $f(z)$ dans une couronne plutôt que dans un disque.

Définition 3 *On dit que la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ est convergente et de somme égale L si $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}$ sont convergentes vers L_1 et L_2 et $L = L_1 + L_2$.*

Théorème 4 *Soit A la couronne limitée par deux cercles C_1 et C_2 de même centre z_0 et de même rayon respectifs r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$, et soit f une fonction holomorphe l'intérieur de la couronne A et sur les deux cercles C_1 et C_2, alors en tous point z intérieur de A, $f(z)$ peut être représenté de manière unique par une série convergente de puissances positives et négatives de $(z - z_0)$.*

$$\forall z \in A = \{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

Ou

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad b_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-n+1}} dw....(*)$$

– *(*) est appelée série de Laurent associe à f.*

– *La série des puissances positives* $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ *s'appelle la partie régulière.*

– *La série des puissances négatives* $\sum_{n>0} b_n(z-z_0)^{-n}$ *s'appelle la partie principale.*

– *On dira que la série de Laurent converge si ses parties principale et régulière convergent.*

Démonstration.
soient w sur le cercle C_1 ou C_2et z dans la couronne A ie z entre le cercle C_1 et C_2 avec $|z-z_0| = r$, $r_1 < r < r_2$.
Par la formule intégrale de Couchy sur la couronne A on a:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z)}dw - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z)}dw$$

D'aprés le théorme précédent (série de Taylor)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z)}dw = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

– Pour le deuxième terme: $-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z)}dw$, on a:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-w} &= \frac{1}{(z-z_0)-(w-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)(1-\frac{w-z_0}{z-z_0})}. \\
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z)}dw &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-z_0)}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(1-\frac{w-z_0}{z-z_0})}dw.. \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-z_0)}\oint_{C_1} f(w)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n dw, \quad \mid \frac{w-z_0}{z-z_0} \mid < 1.
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n$ converge uniformement car

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)}dw &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-z_0)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_0)^n}\oint_{C_1} f(w)(w-z_0)^n dw. \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\oint_{C_1} f(w)(w-z_0)^n dw.
\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $N = n+1$,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z)}dw &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{N=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_0)^N}\oint_{C_1} f(w)(w-z_0)^{N-1}dw \\
&= \sum_{N=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-N+1}}dw\right)}_{\text{bN}}(z-z_0)^{-N} \\
&= \sum_{N=1}^{+\infty} b_N(z-z_0)^{-N}
\end{aligned}$$

Exemple 3 *Développez selon Laurent sur le couronne* $A = \{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$ *la fonction* $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$
Par décomposition en éléments simple, on a:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Comme $|z| < 2$*, alors* $\frac{|z|}{2} < 1$*, par suite:*

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}z^n = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+1}}z^n.$$

D'autre part $1 < |z|$*, donc* $\frac{1}{|z|} < 1$*, d'oú:*

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z(1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}}$$

Par consquent pour tout $z \in A$*, on obtient*

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+1}}z^n - \sum_{n\geq}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

0.3 Singularité isolées d'une fonction complexe

Définition 4 z_0 *est un point singulier isolé si la fonction* f *n'est pas holomorphe en* z_0 *mais l'est en tous autre point d'un disque centré en* z_0*.*

Exemple 4

1. $f(z) = \frac{1}{z-1}$*, admet* $z_0 = 1$ *comme point singulier isolé.*

2. $g(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$*, admet une infinité de point singulier autour* $z_0 = 0$ *ce sont* $z_n = \frac{1}{n\pi}$*, donc* $z_0 = 0$ *n'est pas un point singulier isolé.*

Classification des points singuliers isolés
Il est possible de classer les singularités isolées d'une fonction f l'aide de sa série de Laurent. Supposons que z_0 une singularité isolé de f admet un développement en série de Laurent centré en z_0.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_b(z-z_0)^{-n}$$

1. Si la partie principale du développement contient un nombre infini de termes, alors z_0 est une singularité essentielle.
   Exemple 5 *La fonction* $e^{\frac{1}{z}}$ *a une singularité en* $z_0 = 0$ *et comme*

   $$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + ...,$$

   donc $z_0 = 0$ *est un point singulier isolé essentiel.*

2. Si la partie principale du développement contient un nombre fini de termes, ie

$$f(z) = \frac{b_N}{(z-z_0)^N} + \frac{b_{N-1}}{(z-z_0)^{N-1}} + ... + \frac{b_i}{(z-z_0)^i} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

N: le plus grand des indices de b_N, alors z_0 est un pole d'ordre N.

Exemple 6

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + ..., \quad |z| < 1$$

. $z_0 = 0$ est un pole d'ordre 2.

3. Si la partie principale du développement est nulle, z_0 est une singularité apparente.

Exemple 7

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + ...$$

donc $z_0 = 0$ est un point singulier isolé apparente.

Proposition 2 *Si f une fonction holomorphe sur le voisinage $\{z \in \mathbb{C}, |z-z_0| < \delta\}$ et s'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que*

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^N f(z) \neq 0$$

et

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^{N+1} f(z) = 0$$

alors z_0 est un pôle d'ordre N.

Exemple 8 *Soit la fonction $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, z_0 = 1$ posons*

$$u = z - 1 \Longleftrightarrow z = u + 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^z}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2u+2}}{u^3} = e^2 \frac{e^{2u}}{u^3} \\
&= \frac{e^2}{u^3}\left(1 + 2u + 2u^2 + \frac{4}{3}u^3 + \cdots\right) \\
&= \frac{e^2}{u^3} + \frac{2e^2}{u^2} + 2\frac{e^2}{u} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}u + \cdots \\
&= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + 2\frac{e^2}{(z-1)} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \cdots
\end{aligned}$$

$z_0 = 1$ est un pôle triple (d'ordre 3) car

$$\lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^3 f(z) = \lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^3 \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = e^2 \neq 0$$

$$\lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^4 f(z) = \lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^4 \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = 0$$

0.4 Exercices

Execice 1 *Trouvez le rayon de convergence des sériés entières suivantes*

$$1. \sum_{n\geq 0} n^{\alpha} z^n, \alpha \in \mathbb{R}, 2. \sum_{n\geq 0} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n, 3. \sum_{n\geq 1} a_n x^n, a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

Execice 2 *déterminer la nature des points singuliers* $\frac{1}{z^4-z^2}, \coth z, \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$.

Execice 3 *Soit f la fonction suivante*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$$

Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de 0 *en précisant les domaines de convergence.*

Execice 4 *Soit*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$$

1. *Trouver les constantes a et b tels que.*

$$f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+2}$$

2. *Développer la fonction f(z) en série de Laurent autour de* 0.

Execice 5 *Soit*

$$f(z) = \frac{-1}{i} \frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

1. *Déterminer les singularités et préciser leurs types.*