Module : Analyse Complexe
Eenseignante : Fouzia Chita
Chapitre "4" : Le Calcul intégral

Ce chapitre contient certains des résultats les plus importants de l'analyse complexe. On cite parmi ces résultats le théorème de Cauchy-Goursat et la formule intégrale de Cauchy. Un résultat fascinant déduit de la formule intégrale de Cauchy est que si une fonction complexe est dérivable une fois en un point, alors les dérivés de n'importe quel ordre existent et ces dérivées sont elles mêmes analytiques. Autres théorm̀es importants de ce chapitre sont, le théorème de la valeur moyenne de Gauss, le théorm̀e de Liouville

0.1 Intégrale curviligne

Définition 1 *Soit D un domaine du plan complexe $\mathbb{C}$, et soit C une courbe paramétrée par le chemin:*

$$\begin{array}{rcl}\gamma : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & \gamma(t)\end{array}$$

tel que $\gamma'(t)$ existe et continue.
Soit f une fonction complexe continue et définie sur D:

$$\begin{array}{rcl}f : D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \gamma & \longrightarrow & f(\gamma)\end{array}$$

On définit l'intégrale de f le long de la courbe C par

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$$

Remarque 1
- *L'intégrale le long d'une courbe est aussi appelée intégrale le long d'un* ***chemin****, ou intégrale* ***curviligne*** *complexe.*

- *Si la courbe C est fermée et orientée dans le sens trigonomitrique on note $\oint_C f(z)dz$ au lieu $\int_C f(z)dz$*

Proposition 1 *Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $z(t) = x(t) + iy(t)$, l'intégrale $\int_C f(z)dz$ peut être exprimée sous la forme suivante*

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i(vdx + udy) \\ &= \int_a^b u(x(t),y(t))x'(t)dt - \int_a^b v(x(t),y(t))y'(t)dt \\ &+ i\left[\int_a^b u(x(t),y(t))y'(t)dt + \int_a^b v(x(t),y(t))x'(t)dt\right]\end{aligned}$$

Exemple 1 *Soit C le segment entre $O(0,0)$ et $A(3,1)$ qui est défini par*

$$C = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} \ telque \ \ \gamma(t) = (1-t)O + tA, \ \ 0 \leq t \leq 1\}$$

$$C = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} \ telque \ \ \gamma(t) = (1-t)(0+i0) + t(3+i), \ \ 0 \leq t \leq 1\}$$

$$C = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} \ telque \ \ \gamma(t) = 3t + it, \ \ 0 \leq t \leq 1\}$$

Calculons l'intégrale $\int_C \overline{z}dz$ ($f(z) = \overline{z}$).

On a $d\gamma = \gamma^{'}(t)dt = (3+i)dt$, Alors

$$\int_C \overline{z}dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt = \int_0^1 \overline{\gamma(t)}\gamma^{'}(t)dt = (3+i)\int_0^1 (3t-it)dt = 5$$

Exemple 2 *Calculer $\int_C f(z)dz$ où $f(z) = z^2$*

C:est le segment entre le point $O(0,0)$ et le point $A(1,0)$ suivi du segment entre le point $A(1,0)$ et $B(1,1)$.

– *Il faut d'abord trouver le paramétrage du segment $\gamma_1 : [OA]$ et du segment $\gamma_2 : [AB]$.*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & \gamma_1(t) = (1-t)O + tA = (1-t)(0+i.0) + t(1+i.0) = t. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_2 : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & \gamma_2(t) = (1-t)A + tB = (1-t)(1+i.0) + t(1+i.1) = 1+it. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz. \\ &= \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1^{'}(t)dt + \int_0^1 f(\gamma_2(t))\gamma_2^{'}(t)dt. \\ &= \int_0^1 t^2dt + \int_0^1 i(1+it)^2dt. \\ &= \frac{(1+i)^3}{3} \end{aligned}$$

Exemple 3 *Calculer $\int_C f(z)dz$ où $f(z) = z$.*

C:est le quart de cercle de rayon 2 reliant les points $(2,0)$ à $(0,2)$ ie.

$C = \left\{\gamma(t) \in \mathbb{C} \ telque \ \ \gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

$$\int_C f(z)dz \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{it}.2ie^{it}dt = 4i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2it}dt = -4.$$

Propriétés des courbes

Définition 2 – *Toute application continue $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ S'appelle* ***chemin (courbe)***

– *$\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont* ***l'origine*** *et* ***l'extrémité*** *du courbe respectivement.*

– *Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est une courbe fermée ou est un* ***lacet***

– *Si la restriction de l'application γ sur l'intervalle $]a,b[$ est* ***injective****, on dit que la courbe est* ***simple****.*

– *Toute courbe fermée est simple, est appellée courbe de* ***Jordan****.*

– *$C = \{\gamma(t); t \in [a,b]\}$ s'appelle courbe paramétrée dans le plan complexe par l'application γ.*

– *La courbe γ est de classe C^1 par morceaux s'il existe un nombre fini de points $a \prec t_1 \prec t_2 \prec \cdots \prec t_m \prec b$ tels que l'application $\gamma(t)$ possède des dérivées à gauche et à droite de chaque points t_j et toutes ses restrictions $]t_j,t_{j+1}[\xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}$ sont de classe C^1.*

– *L'application continue $\gamma^- : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ s'appelle chemin* ***inverse*** *du chemin γ.*

– *Toute courbe paramétrée poura être parcourue suivant deux sens soit de $\gamma(a)$ vers $\gamma(b)$ ou bien de $\gamma(b)$ vers $\gamma(a)$*
** le parcourt du point $\gamma(a)$ vers le point $\gamma(b)$ s'appelle orientation positive (le sens trigonométrique).*
** le parcourt du point $\gamma(b)$ vers le point $\gamma(a)$ s'appelle orientation négative (le sens horaire).*

– *Si l'application γ est définie par $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, alors la longueur $L(\gamma)$ du courbe γ est égale à*

$$L(\gamma) := \int_a^b \left|\gamma^{'}(t)dt\right| = \int_a^b \sqrt{(x^{'}(t))^2 + (y^{'}(t))^2}dt$$

Quelques exemples importants:

1. C est une courbe reliant z_1 à z_2 dans $\mathbb{C}$, alors $\int_C dz = z_2 - z_1$ et $\int_C z^n dz = z_2^{n+1} - z_1^{n+1}$
   Dmonstration.

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ t & \longrightarrow & \gamma(t), \gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_C z^n dz &= \int_a^b (\gamma(t))^n \gamma(t)^{'} dt = \left[\frac{(\gamma(t))^{n+1}}{n+1}\right]_a^b. \\ &= \frac{(\gamma(b))^{n+1}}{n+1} - \frac{(\gamma(a))^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}\right). \end{aligned}$$

$$\int_C dz = \int_a^b 1.\gamma(t)^{'}dt = [(\gamma(t))]_a^b = z_2 - z_1.$$

2. Si C est un lacet (ie $z_1 = z_2$) alors $\int_C z^n dz = 0$.

3. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$,$n \in \mathbb{Z}$ et C_r le cercle de centre z_0 et de rayon r alors: Dmonstration.

$$\begin{array}{rcl} C_r : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ t & \longrightarrow & C_r(t) = z_0 + re^{it} \end{array}$$

alors

$$\int_{C_r} (z - z_0)^n dz \;\; = \;\; \int_0^{2\pi} (z_0 + re^{it} - z_0)^n (ire^{it}) dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt =$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0 & ; n \neq -1 \\ \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Quelques exemples importants des courbes

1)**Le cercle**: Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, le cercle de centre z_0 et de rayon r, qui est une courbe fermée paramétrée par l'application

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & z_0 + re^{it}, \;\; 0 \leq t \leq 2\pi : . \end{array}$$

* pour voir une orientation négative du cercle on pose $\gamma(t) = z_0 + re^{-it}$,

2)**Le segment**: Soient $z_1,z_2 \in \mathbb{C}$, le segment orienté d'origine z_1 et d'extrémité z_2, qui le note $[z_1,z_2]$, est défini par

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & (1-t)z_1 + tz_2. \end{array}$$

Propriétés Soit C une courbe dans le plan complexe. On note par $-C$, la courbe C orienteé dans son sens inverse. On suppose que $C = C_1 \cup C_2$ avec le point final de la courbe C_1 coïncide avec le point initial de la courbe C_2.
Si f et g sont intégrables le long de C, alors

1. $\displaystyle\int_C f(z) + g(z) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz.$
2. $\displaystyle\int_C \alpha f(z) dz = \alpha \int_C f(z) dz$
3. $\displaystyle\int_{-C} f(z) dz = -\int_C f(z) dz$
4. $\displaystyle\int_C f(z) dz = \int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$

Proposition 2 *Soit F une fonction holomorphe avec une dérivée $F^{'}(z) = f(z)$ continue dans une domaine $D \subset \mathbb{C}$, soit C une courbe dans D, son origine z_1 et son extrimité z_2, alors:*

$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C F^{'}(z)dz = \int_a^b F^{'}(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt \\ &= [F(\gamma(t))]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= F(z_2) - F(z_1) \end{aligned}$$

Proposition 3 *On a la formule d'intégration par parties:*

$$\int_C F(z)G^{'}(z)dz = F(z)G(z) - \int_C F^{'}(z)G(z)dz$$

0.2 Théorème de Cauchy.

Théorème 1 *Si f est une fonction définie dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$, et si γ est une courbe, simple fermée à l'intérieur de D et f est holomorphe à l'intérieur de γ et sur γ alors*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Exemple 4 *Soit le cercle de centre 0 et de rayon 2*

$$C = \left\{\gamma(t) \in \mathbb{C}, t \in [0,2\pi] \, o\grave{u} \gamma(t) = 2e^{it}\right\}$$

Calculer $\int_C zdz$, on a

$$\begin{aligned} \int_\gamma zdz &= \int_0^{2\pi} \gamma(t).\gamma^{'}(t)dt = 4i \int_0^{2\pi} e^{2it}dt. \\ &= 2\left[e^{2it}\right]_0^{2\pi} = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Corollaire 1 *Si f est holomorphe dans un domaine limité par deux courbes simples et fermées γ_1 et γ_2 et sur ces courbes γ_1 et γ_2, alors:*

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

Si les deux courbes sont parcourues dans le sens positif.

Exemple 5 *Calculer $\int_{C_1} \frac{1}{z}dz$, où*

$$C_1 = \{\gamma_1(t) \in \mathbb{C}, t \in [0,2\pi] \, o\grave{u} \; \gamma_1(t) = 2\cos + 3i \sin t\}$$

La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe dans le domaine limité par les courbes C_1 et C_2 et sur ces courbes, où C_2 est le cercle de centre 0 et de rayan 1.

$$C_2 = \left\{\gamma_2(t) \in \mathbb{C}, t \in [0,2\pi] \text{ où } \gamma_2(t) = e^{it}\right\}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{1}{z} dz &= \int_{C_2} \frac{1}{z} dz = 4i \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} e^{it} dt. \\ &= i\,[t]_0^{2\pi} = 2i\pi. \end{aligned}$$

0.3 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 2 *Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe simple fermée γ et sur cette courbe, Si w est un point à l'intérieur de γ alors:*

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz$$

où γ est parcouru dans le sens positif.

Exemple 6 *Calculer $\oint_{|z|=2} \frac{z^2-4z+1}{z+i} dz$ Solution. Soit $f(z) = z^2 - 4z + 1$, $w = -i$ et notons que f est holomorphe dans $|z| \leq 2$ et que w est lintérieur du disque $|z| \leq 2|z| \leq 2$. Daprès la formule de Cauchy, on obtient:*

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2-4z+1}{z+i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i.4i = -8\pi$$

Exemple 7 *Calculer $\oint_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2+9} dz$ Solution. Notons que $z^2 + 9 = (z-3i)(z+3i)$,et que seul $w = 3i$ est lintérieur de $|z-2i| = 4$.Si on choisit $f(z) = \frac{z}{z+3i}$ et en utilisant la formule de Cauchy, on obtient :*

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^2-4z+1}{z+i} dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i.\frac{3i}{6i} = i\pi$$

0.4 Formule de la moyenne

Théorème 3 *Supposons que f est holomorphe (analytique) sur un domaine simplement connexe D et que $C(z0,r) \subset D$, alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Démonstration. Soit $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ une parametrage. La formule de Cauchy nous donne

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z_0} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

0.5 Formule intégrale de Cauchy pour les dérivées.

Théorème 4 *la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

– La formule précédente est appelées formules intégrales de Cauchy et est très remarquable car ils montre que si une fonction f est connue sur la courbe simple fermée γ, alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à intérieur de γ.

– Si une fonction de la variable complexe admet une dérivée première dans un domaine simplement connexe D, toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans D. Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.

Exemple 8 *utiliser la formule intégrale de Cauchy pour évaluer* $\oint_C \frac{z-1}{(z+1)(z+2)} dz$ *le long du cercle* $C = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z| = \frac{z}{2} \right\}$.

La fonction $z \longrightarrow f(z) = \frac{z-1}{z+2}$ *est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, alors d'après la formule intégrale de Cauchy avec* $w = -1$*, on a*

$$\oint_C \frac{z-1}{(z+1)(z+2)} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z+1)} dz = 2\pi i f(-1) = -4i\pi$$

Exemple 9 *utiliser la formule intégrale de Cauchy pour évaluer* $\oint_C \frac{1}{z(z-1)^4} dz$ *le long du cercle* $C = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z-1| = \frac{1}{2} \right\}$.

La fonction $z \longrightarrow f(z) = \frac{1}{z}$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$*, donc elle est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, alors*

d'après la formule intégrale de Cauchy avec $w = 1$*, on a*

$$\oint_C \frac{1}{z(z-1)^4} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^4} dz = \frac{2\pi i f^{(3)}(1)}{3!} = \frac{2\pi i.(-6)}{6} = -2i\pi$$

0.6 Inégalité de Cauchy

Théorème 5 *Si f une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle* C_r *et sur* C_r*, où* C_r *désigne le cercle de centre* z_0 *et de rayon r, posons:* $M = \sup_{z \in C_r} |f(z)|$*, alors*

$$\forall n \geq 0 : \left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq M \frac{n!}{r^n}.$$

Dmonstration.

Par la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées.

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2i\pi}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| dz. \\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{|f(z)|}{(z-z_0)^{n+1}}dz. \\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\oint_{C_r}|dz|. \\ &\leq M\frac{n!}{r^n}. \end{aligned}$$

0.7 Théorème de Liouville- Théorème de Morera

Théorème de Liouville

Théorème 6 *Toute fonction entière et bornée est constante.*
Démonstration.
Soit f(z) une fonction entière et bornée c.a.d. $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Daprès linégalité de Cauchy pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a

$$\left|f^{'}(z_0)\right| \leq \frac{M}{r} \longrightarrow 0$$

quand $r \longrightarrow +\infty$ Donc $\left|f^{'}(z_0)\right| = 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ ce qui montre que la fonction f est constante.
Théorème 7 *(Thorme de Morera)*
Supposons que f est continue sur un domaine simplement connexe D et

$$\oint_\gamma f(x)dz = 0$$

pour tout lacet de D. Alors f est analytique sur D.
Démonstration. Puisque f est continue alors elle admet une primitive $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$ pout tout $z \in D$; o z_0 est un point fixe à lintrieur de D. Donc F est analytique dans D et par conséquent sa dérivée f est aussi analytique.

0.8 Exercices

Execice 1 *Trouver dans chaque cas, la courbe C ayant pour paramétrage:*

$$1)\ \gamma(t) = Re^{it}, t \in [0,2\pi] \quad R \succ 0; \quad 2)\ \gamma(t) = t + it^2, t \geq 0$$

$$3)\gamma(t) = t + \frac{i}{t}, \quad t \geq 1.$$

Execice 2 *Calculer $\int_\gamma |z|\, dz$, où:*

1. *γ est le segment $[A,B]$, A(0,-1) B(0,1).*

2. *γ est le demi cercle,*$|z| = 1$, $\Re z \geq 0$ *reliant le point* $(0, -1)$ *au* $(0,1)$

Execice 3 *Calculer* $\int_\gamma z \sin z dz$, *où* γ *est le segment reliant le point* $(0,0)$ *au point* $(0,1)$.

Execice 4 *En utilisant la formule intégrale de Cauchy, Calculez les intégrales suivants (les courbes sont parcourus une fois dans le sens (+)).*

$$1) \int_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i}, \quad 2) \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$$
$$3) \int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} \quad 4) \int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^2} dz$$

0.8.1 Exercices Supplémentaires

Execice 5 1. *Calculer l'intégrale suivante:* $\int_i^{1+i} (1+iy)dz$

2. *Calculer l'intégrale suivante sur une courbe* γ *paramétrée par* $x = 1+t$ *et* $y = t$ *et* $t \in [0,1]$ *reliant les points* 1 *et* $2+i$: $\int_1^{2+i} (x+ixy)dz$

3. *Calculer l'intégrale suivante sur un demi-cercle* γ *de rayon* 2 *et de centre* $(0,0)$: $\int_\gamma \frac{z^2+4}{z}$

Execice 6 *Calculer l'intégrale suivante par la méthode directe puis en effectuant l'intégration suivant les chemins indiqués* $\int_{1-2i}^{3+i} (2z+3)dz$

1. *Le long du chemin:* $x = 2t+1$ *et* $y = 4t^2 - t - 2$ *et* $t \in [0,1]$.

2. *Le long de la droite joignant* $(1-2i)$ *et (3+i).*

3. *Le long des segments joignant* $(1-2i)$ *et* $(1+i)$ *puis* $(1+i)$ *et* $(3+i)$.

4. *Le long des demi-cercles* C_1 *et* C_2: C_1*(de centre* $z_0 = 1 - \frac{1}{2}i$*,de rayon* $r = \frac{3}{2}$*.)et* C_2*(de centre* $z_0 = 2+i$*,de rayon* $r = 1$*.)*

FORMULE INTÉGRALE DE CAUCHY

Execice 7 *Calculer chacune des intégrales suivantes sur les courbes* γ *indiquées:*

1. $\oint_\gamma \frac{z^2+z+1}{z-1-i} dz$. γ *un cercle de centre* $(1,0)$ *et de rayon* 2.
2. $\oint_\gamma \frac{z+\cos z}{z-\frac{\pi}{2}} dz$. γ *un cercle de centre* $(0,1)$ *et de rayon* 1.
3. $\oint_\gamma \frac{e^z}{3z-2} dz$. γ *un carré de sommets* $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$, $D(1,-1)$.
4. $\oint_\gamma \frac{z+e^{2z}+1}{z^4} dz$. γ *un cercle de centre* $(1,1)$ *et de rayon* 2.
5. $\oint_\gamma \frac{e^{iz}+2}{z(z-1+i)} dz$. γ *un cercle de centre* $(0,0)$ *et de rayon* $\frac{1}{2}$.
6. $\oint_\gamma \frac{e^{2iz\pi}+1}{z^1} dz$. γ *un cercle d'équation* $|z-1| = \frac{1}{2}$.