Module : Analyse Complexe
Eenseignante : Fouzia Chita
Chapitre "3 " :Fonctions élèmentaires

Les fonctions complexes sont un prolongement naturel des fonctions réelles sur le plan des nombres complexes $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre nous étudierons les propriétés principales des fonctions élèmentaires complexes, leurs domaines d'analycité et leurs dérivées.

0.1 Fonction exponentielle.

Définition 1 *Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, o x et y sont des réels, on défini la fonction exponentielle complexe par la relation $e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(cosy + isiny)$ Si $y = 0$ alors $z = x$, cette définition concide avec la définition dans les réels. Donc la fonction complexe e^z un prolongement de la fonction réelle e^x.*

Théorème 1 *La fonction exponentielle complexe e^z est entière et sa dérivée est égale à*

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

Démonstration. Notons que $\Re(e^z) = u(x,y) = e^x \cos y$ et $\Im(e^z) = v(x,y) = e^x \sin y$. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann on a pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$u_x = e^x \cos y = v_y, u_y = -e^x \sin y = v_x$$

Donc e^z est entière et on a

$$\frac{d}{dz}e^z = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Exemple 1 *Trouver la dérivées de chacune des fonctions:*

$$f_1(z) = iz^4(z^2 - e^z), f_2(z) = e^{z^2-(1+i)z+3}$$

.
Solution.

$$f_1'(z) = 6iz^5 - iz^4e^z - 4iz^3e^z, f_2'(z) = e^{z^2-(1+i)z+3}.(2z - 1 - i)$$

Proprits de e^z

Lexponentielle complexe e^z possède les propriétés suivantes:

$$(1)e^0 = 1,(2)e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2},(3)\frac{1}{e^z} = e^{-z}(4)\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2},(5)(e^z)^n = e^{nz}, n \in \mathbb{Z}$$
$$(6)\,|e^z| = e^{\Re z} = e^x \succ 0,(7)e^z \neq 0,(8)e^{z+2\pi i} = e^z,(9)(e^z)' = e^z \forall z \in \mathbb{C}$$

$$,(10)a^z = e^{z \ln a}, a \succ 0$$

Remarque 1 *La fonction exponentielle complexe e^z est*
- *périodique de période $2\pi i$,*
- *n'est pas injective comme dans les réels,*
- *ne sannule pour aucune valeur complexe.*

0.2 Fonction logarithme

Comme pour le cas réel, la fonction logarithme réele est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle, donc

$$e^w = z \Longleftrightarrow \log z = w, z \neq 0$$

Le nombre complexe w n'est pas définit de faon unique car si $z = e^w$ alors $e^{w+i2k\pi} = e^w = z$ aussi ceci signifie que $\log z$ est une fonction multiforme, il ya une infinité de w associes au même nombre complexe z le problème fondamental est donc de trouver une valeur $w = x + iy$ telle que $e^w = z, \forall z \in \mathbb{C}, z = |z| e^{i\theta}$, ou θ est l'argument de z.

$$\begin{aligned} e^w = z &\Longleftrightarrow e^{u+iv} = |z| e^{i\theta}; \\ &\Longleftrightarrow e^u.e^{i\theta} = |z| e^{i\theta} \\ &\Longleftrightarrow e^u = |z| \\ &\Longleftrightarrow e^{iv} = e^{i\theta} \\ &\Longleftrightarrow v = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Une solution est donc donnée par $u = \ln|z|, v = \theta$ donc $w = \ln|z| + i\theta$

Les autres solutions sont $\log z = \log|z| + i\theta + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$

Définition 2 *On appelle determination principale du logarithme de z et on note* $\log z$ *le cas ou* $k = 0$ *et* $-\pi \prec \theta \leq \pi$

Exemple 2

1. $\log(1+i) = \log(\sqrt(2)e^{i\frac{\pi}{4}}) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}, (k = 0, \theta = \frac{\pi}{4} \in [-\pi, \pi])$
2. $\log i = \log(1e^{i\frac{\pi}{2}}) = \ln(1) + i\frac{\pi}{2}, (k = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi])$
3. $\log(-1) = \log(1e^{i\pi}) = \ln(1) + i\pi$

Remarque 2 *En En général on a:*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \log(z_1.z_2) \neq \log(z_1) + \log(z_2)$$

On a plutôt la formule.

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

avec $k = -1, 0, 1$ *selon les cas.*

En effet:

$$\begin{aligned} \log(z_1.z_2) &= \log(|z_1| . |z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}); \\ &= \ln(|z_1.z_2|) + i(\theta_1 + \theta_2) + 2ki\pi; \\ &= \ln(|z_1|) + \ln(|z_2|) + i(\theta_1) + i(\theta_2) + 2ki\pi; \\ &= \log(z_1) + \log(z_2) + 2ki\pi; \end{aligned}$$

On peut toujours supposer que $-\pi \prec \theta_1 \prec \pi$ et $-\pi \prec \theta_2 \prec \pi$
On a trois posibilits pour $\theta_1 + \theta_2$

$$\begin{array}{rcl} \theta_1 + \theta_2 \leq -\pi & ; & \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) + 2i\pi. \\ -\pi \prec \theta_1 + \theta_2 \leq \pi & ; & \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2). \\ \theta_1 + \theta_2 \succ \pi & ; & \Rightarrow k = -1 \Rightarrow \log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) - 2i\pi. \end{array}$$

Exemple 3

$$\log(-1-i) = \log((-1)(1+i)) = \log(-1) + \log(1+i) + 2ki\pi$$

avec $k = -1$ *ou* $k = 0$ *ou* $k = 1$ *on a*

$$\theta_1 = \arg(-1) = \pi, \theta_2 = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow k = -1$$

$$\log(-1-i) = \log((-1)(1+i)) = \log(-1) + \log(1+i) - 2ki\pi$$

Exemple 4

$$\begin{aligned} \log z^n &= \ln(|z|^n) + i(\arg z^n) + 2ki\pi; k,n \in \mathbb{Z}, -\pi \prec \theta \leq \pi \\ &= n\ln(|z|) + in\theta + 2ki\pi; k,n \in \mathbb{Z}, -\pi \prec \theta \leq \pi \\ &= n\ln(|z|) + i(n\theta + 2k\pi); \end{aligned}$$

Proposition 1 *La fonction logarithme* $\log z$ *définie par* $f(z) = \log z$ *est analytique et sa dérivée est donnée par:*

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$$

Démonstration. Si $z = re^{i\theta}$, et $-\pi \prec \theta \prec \pi$ alors

$$\log z = \log(re^{i\theta}) = u + iv = \ln r + i\theta$$

on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1, \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

Donc u et v satisfont les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Ce qui montre que Log z est analytique dans ce domaine et sa dérivée est

$$f^{'}(z) = e^{-i\theta}(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}) = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

0.3 Fonctions circulaires.

Tout comme nous avons étendu la fonction exponentielle réelle, nous étendons maintenant les fonctions circulaires réelles aux fonctions circulaires complexes.
En utilisant la formule d'Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$, on défini le sinus et cosinus d'une variable complexe z par les formules:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$$

Il est clair que ces définitions sont des extensions des fonctions circulaires réelles, car si nous posons $z = x$, nous obtenons $\cos z = \cos x$ et $\sin z = \sin x$.

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{(\cos x + i \sin x) - (\cos x - i \sin x)}{2i} = \sin x$$

Les identités circulaires fondamentales suivantes restent valides. Pour tout z,z_1,$z_2 \in \mathbb{C}$ on a

$$(1) \sin(-z) = -\sin(z),(2) \sin(z + 2\pi) = \sin(z),(3) \sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$$

$$(4) \cos(-z) = \cos(z),(5) \cos(z + 2\pi) = \cos(z),(6) \cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin(z)$$

$$(7) \tan(z + \pi) = \tan(z),(8) \cot(z + \pi) = \cot(z),(9) \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

$$(10) \cos^2(z) - \sin^2(z) = \cos(2z),(11) \sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$$

$$(12) \cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$$

Théorème 2 *Les fonctions* $\sin z$ *et* $\cos z$ *sont entières et leurs dérivées sont :*

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

– *Les parties réelles et imaginaires de* $\sin z$ *et* $\cos z$ *sont données par les formules:*

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

– *Beaucoup de propriétés importantes de* $\sin z$ *et de* $\cos z$ *se déduisent partir de ces formules. Par exemple on a:*

$$\sin(iy) = i \sinh y, \cos(iy) = \cosh y$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

– *Les zéros de* $\sin z$ *et* $\cos z$ *sont tous réels.*

1. *Les zéros de* $\sin z$ *sont* $z = n\pi$,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

2. *Les zéros de* $\cos z$ *sont* $z = (n + \frac{1}{2})\pi$,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Fonctions circulaires inverses
On défini les fonctions circulaires inverses par :

$$\sin^{-1} z = -i \log[iz + (-z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]$$
$$\cos^{-1} z = -i \log[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$$
$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z}, z \neq \pm i$$

0.4 Fonctions hyperboliques

On défini les fonctions hyperboliques comme dans le cas des variables réelles.

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}$$

Théorème 3 *Les fonctions* $\sinh z$ *et* $\cosh z$ *sont entières et leurs dérivées sont :*

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z, \frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$$

– *Les parties réelles et imaginaires de* $\sinh z$ *et* $\cosh z$ *sont données par les formules:*

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \cosh z = \cosh x \cos y - i \sinh x \sin y$$

– *Les relations entres les fonctions circulaires et hyperboliques sont étroites comme on le constate dans les formules suivantes :*

$$\sinh(iz) = i \sin z, \cosh(iz) = \cos z, \sin(iz) = i \sinh z, \cos(iz) = \cosh z$$
$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 z + \sin^2 z, |\cosh z|^2 = \sinh^2 z + \cos^2 z$$

– *Les zéros de* $\sinh z$ *et* $\cosh z$ *sont tous réels.*

1. *Les zéros de* $\sinh z$ *sont* $z = n\pi i, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

2. *Les zéros de* $\cos z$ *sont* $z = (n + \frac{1}{2})\pi i, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Fonctions hyperboliques inverses
On défini les fonctions hyperboliques inverses par :

$$\sinh^{-1} z = \log[z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]$$
$$\cosh^{-1} z = \log[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$$
$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, z \neq \pm 1$$

0.5 Fonction puissances

La fonction puissance gnrale $w = z^a$, o $a \in \mathbb{C}$ est définie par :

$$w = z^a = e^{a \log z}$$

o $\log z$ est une fonction multiforme, et donc la fonction z^a est aussi multiforme

– La drive de z^a est:

$$\frac{d}{dz} z^a = a z^{a-1}$$

– La valeur principale (détermination principale) de z^a sera:

$$e^{a \log z} = e^{a(\ln|z| + i\theta)}$$

– Les autres valeurs s'obtiennent par:

$$z^a = e^{a(\ln|z| + i(\theta + 2k\pi))}$$

Exemple 5 *Trouver toutes les valeurs de:* i^i,$(1+i)^i$

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(i+1)^i = e^{i \log(i+1)} = e^{i(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} = e^{i\frac{\ln 2}{2}} e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}$$

Propriétés de z^a

1. $z^a z^b = z^{a+b}$

2. $(z_1 z_2)^a = {z_1}^a {z_2}^a e^{2k\pi}, k = -1,0,1$

3. $\log z^a = a \log z + 2ki\pi, k \in \mathbb{Z}$

4. $(z^a)^a = z^{a.a} e^{2i\pi ak} k \in \mathbb{Z}$

0.6 Exercices

Execice 1 1. *Montrer que si* $z = x + iy$ *alors:*

$$\sin z = \sin xy + i \cos xy, \cos z = \cos xy - i \sin xy$$

2. *pour quelles valeurs de* x *et de* y $\sin z \in \mathbb{R}$ *et* $\cos z \in \mathbb{R}$.

Execice 2 1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$*, léquation suivante:* $2z + i\bar{z} = 3$.

Execice 3 1. *Résoudre l'équation suivante* $z^4 - i = 0$,$z \in \mathbb{C}$

2. *Trouver les solutions de léquation suivante :*$ie^{iz} - ie^{-iz} = 1$,$z \in \mathbb{C}$.

Execice 4 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes:*

1. $e^z = i + 1$.
2. $\cos z = 3 + 2e^i$.

Execice 5 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation suivante* $2\cos(z) - e^{-iz} = 1 + 2i$.