Module : Analyse Complexe
Eenseignante : Fouzia Chita
Chapitre "2 " : Fonction de la variable complexe

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion d'une fonction d'une variable complexe, à valeur complexe $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, Fonctions holomorphe, Analytique, Equations de Cauchy-Riemann et fonction harmonique.
Notre objectif principal sera d'établir la relation entre les notions de différentiabilité, d'holomorphie et d'analycité d'une fonction complexe.
La différence fondamentale entre l'analyse réelle et l'analyse complexe est que la géométrie du plan complexe $\mathbb{C}$ est beaucoup plus riche que celle de la droite réelle $\mathbb{R}$. Par exemple, les seules partiés connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles, alors qu'il y a des sous-ensembles connexes beaucoup plus compliqués dans $\mathbb{C}$ tel que la couronne.

0.1 Définition de la fonction de la variable complexe

Définition 1 *Soit U un ouvert dans $\mathbb{C}$ et $U' \subseteq \mathbb{C}$ un autre ensemble de $\mathbb{C}$, une fonction qui associe a chaque $z \in U$ un*

$$w = f(z) \subset \mathbb{C}$$

est une fonction complexe a valeur complexe.

$$\begin{array}{rcl} f : U & \longrightarrow & U' \\ z & \longrightarrow & w = f(z) \end{array}$$

Tout fonction complexe s'écrite sous la forme:

$$f(z) = u(x,y) + iy(x,y)$$

Exemple 1 *On considère la fonction*

$$f_1(z) = z^2$$

cette fonction est définie sur l'ensemble $\mathbb{C}$ c'est-à-dire que ***son domaine de définition*** *est $D = \mathbb{C}$.*

Exemple 2 *On considère la fonction*

$$f_2(z) = \frac{z}{z-1}$$

cette fonction est définie sur l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, c'est-à-dire que ***son domaine de définition*** *est $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.*

Exemple 3 *On considère la fonction*

$$f_3(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

cette fonction est définie sur l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$, c'est-à-dire que ***son domaine de définition*** *est $D = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.*

0.1.1 Partie réelle et partie imaginaire d'une fonction complexe

Comme le nombre complexe z s'écrit souvent sous la forme algèbrique classiques

$$z = x + iy$$

cela nous laissent penser que la fonction variable complexe à valeur complexe

$$\begin{array}{rcl} f : D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & w = f(z) \end{array}$$

admet aussi une forme algèbrique. En effet, si $f(z)$ est la valeur de f au point z alors on peut écrire

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Notation 1 *Dans la pratique, on note par la fonction à deux variables.*

$$(x,y) \longrightarrow u(x,y)$$

la partie réelle de la fonction f et on écrit souvent

$$\Re f(z) = u(x,y)$$

et par la fonction à deux variables

$$(x,y) \longrightarrow v(x,y)$$

la partie imaginaire de la fonction z et on écrit souvent

$$\Im f(z) = v(x,y)$$

Exemple 4 *On considère la fonction*

$$f(z) = xy + ix^2y^2$$

$$f(z) = x + iy$$

$$f(z) = e^{i(\ cosy + i \sin y)}.$$

On considère par exemple la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & f(z) = z^2 + \overline{z} \end{array}$$

Pour déterminer la partie réelle et imaginaire de notre fonction, il suffit tout simplement de remplacer dans l'expression de f, la valeur de z par $x + iy$,Donc

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x + iy & \longrightarrow & f(x + iy) = (x + iy)^2 + \overline{x + iy} \end{array}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{array}{rcl} f(x + iy) & = & x^2 + y^2 + x - iy \\ & = & (x^2 + y^2 + x) + i(-y) \end{array}$$

ce qui implique que

$$\begin{array}{rcl} \Re f(z) & = & u(x,y) = x^2 + y^2 + x. \\ \Im f(z) & = & v(x,y) = (-y). \end{array}$$

0.1.2 Limites et continuité d'une fonction complexe

Limites d'une fonction complexe

Définition 2 *Soit f la fonction complexe*

$$\begin{array}{rcl} f : D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & w = f(z) \end{array}$$

avec D est le domaine de définition de f. Soit $z_0 \in D$. On dit que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $z \in D$ et

$$0 \prec |z - z_0| \prec \delta$$

alors

$$|f(z) - L| \prec \epsilon$$

Remarque 1 *Lorsque*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

on pose

$$z_0 = x_0 + iy_0$$

et

$$L = L_1 + iL_2$$

Alors

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = L_1 \quad et \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = L_2$$

En effet, il est facile de constater que

$$\begin{array}{rcl} |f(z) - L| & = & |(u(x,y) + iv(x,y)) - (L_1 + iL_2)| \\ & = & |(u(x,y) - L_1) + i(v(x,y) - L_2)| \end{array}$$

L'inégalité triangulaire implique que

$$\begin{array}{rcl} |f(z) - L| & = & |(u(x,y) + iv(x,y)) - (L_1 + iL_2)| \\ & \leq & |(u(x,y) - L_1) + i(v(x,y) - L_2)| \end{array}$$

En tenant compte que

$$\begin{array}{rcl} |u(x,y) - L_1| & \leq & \sqrt{(u(x,y) - L_1)^2 + (v(x,y) - L_2)^2} = |f(z) - L| \\ |v(x,y) - L_2| & \leq & \sqrt{(u(x,y) - L_1)^2 + (v(x,y) - L_2)^2} = |f(z) - L| \end{array}$$

Ce qui montre que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \Longleftrightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = L_1 \quad et \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = L_2$$

La continuité d'une fonction complexe

Définition 3 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ On dit que f est continue au point z_0 de U*

$$\forall z_0 \in E, \forall \epsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0, \forall z \in E, 0 \leq |z - z_0| \prec \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \leq \epsilon$$

i.e

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Exemple 5 *Soit*

$$f(x+iy) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{z \longrightarrow 0} f(z) = \lim_{\rho \longrightarrow 0} \frac{\rho^2(\cos\theta \times \sin\theta)}{\rho^2}$$

Donc f n'est pas continue en point 0.

Proposition 1 *Soit U un ouvert dans $\mathbb{C}$ on a*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

fonction continue

$$\begin{aligned} \lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{z \longrightarrow z_0} \overline{f(z)} = f(z_0) \\ \lim_{z \longrightarrow z_0} \Re(f(z)) \quad &= \quad \Re(f(z_0)). \\ \lim_{z \longrightarrow z_0} \Im(f(z)) \quad &= \quad \Im(f(z_0)). \end{aligned}$$

Proposition 2 *Soit f, g deux fonctions complexes continue en z_0 alors :*

$$(f+g), (f \times g), (\frac{f}{g} \quad tel \quad que \quad g \neq 0), |f|, \Re(f), \Im(f).$$

sont continue en z_0.

Proposition 3 *La fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est continue en $z_0 = (x_0,y_0)$ si et seulement si les fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues en (x_0,y_0):*

Exemple 6 *La fonction*

$$f(z) = \overline{z}$$

est continue sur $\mathbb{C}$. En effet, si on écrit cette fonction sous la forme algébrique, on constate facilement que

$$f(z) = x - iy$$

i.e

$$\Re f = u(x,y) = x, \Im f = v(x,y) = -y$$

qui sont continues en tout point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et par conséquent sur $\mathbb{C}$.

Exemple 7 *Si on considère la fonction*

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

est définie par

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & si \quad z \neq i \\ 0 & si \quad z = i \end{cases}$$

cette fonction est discontinue en $z_0 = i$ car

$$\lim_{z \longrightarrow i} f(z) = -1 \neq f(i) = 0$$

0.1.3 La dérivabilité d'une fonction complexe

Définition 4 *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.*
On dit que f est ***dérivable*** *au point z_0, ou* ***$\mathbb{C}$-dérivable*** *si l'expression $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0. Cette limite est appelée le* ***nombre dérivé*** *de f en z_0 et noté par $f^{'}(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$*

Exemple 8 *Soit la fonction $f(z) = z^2$, on a:*

$$\forall z \in \mathbb{C} : lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2-(z)^2}{h} = lim_{h\to 0}(2z+h) = 2z$$

alors f est dérivable en tout point $z \in \mathbb{C}$ et $f^{'}(z) = 2z$

Continuité des fonctions dérivables

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. si f est dérivable en z_0, alors f est continue en z_0. l'inverse n'est pas toujours vrai

$$lim_{h\to 0}(f(z_0+h)-f(z_0)) = lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.h = 0$$

(Puisque $lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe)

Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Les mêmes propriétés algébriques sur les fonctions dérivables sont obtenues comme celles des dérivées réelles.

Proposition 4 *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions dérivables en un point z_0 de S, telle que f,$g : S \to \mathbb{C}$*

On a les propriétés suivantes:

*1-**La somme** $f+g$ est dérivable en point z_0 et on a*

$$(f+g)^{'}(z_0) = f^{'}(z_0) + g^{'}(z_0)$$

Et pour $\lambda \in \mathbb{C}$ λf est dérivable en point z_0 et on a

$$(\lambda f)^{'}(z_0) = \lambda f^{'}(z_0)$$

*2- **Le produit** $f.g$ est dérivable en point z_0 et on a*

$$(f.g)^{'}(z_0) = f^{'}(z_0)g(z_0) + g^{'}(z_0)f(z_0)$$

3-Si $g(z_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en point z_0 et on a

$$(\frac{f}{g})^{'}(z_0) = \frac{f^{'}(z_0)g(z_0) - g^{'}(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}$$

Proposition 5 *Soient U et U' deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$,$g : S' \to \mathbb{C}$. On suppose que f est dérivable en un point z_0 et que g est dérivable en un point $f(z_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en un point z_0, et on a*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)).f'(z_0)$$

Proposition 6 *Une fonction réelle à variable complexe, est soit dérivable en un point z_0 et sa dérivée est nulle, soit elle n'est pas dérivable en z_0.*

Exemple 9 *Soit la fonction $f(z) = \overline{z}$, on a:*

$$\forall z \in C : lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\overline{(z+h)}-\overline{(z)}}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$$

$$= \begin{cases} 1 & si \quad h \in \mathbb{R} \\ -1 & si \quad h \in \mathbb{IR} \end{cases}$$

Alors $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers zéro (f n'est pas dérivable sur $\mathbb{C}$).

0.2 Fonctions holomorphes, fonction analytiques

Définition 5 *Soit $w = f(z)$ on dit que la fonction f:*

- *est **holomorphe** ou **analytique** en un point z_0 d'un domaine D si elle est **dérivable** aussi bien au point z_0 lui-même que dans un certain voisinage de ce point. On dit aussi que f est analytique en z_0 si elle est développable en une série entière au voisinage de z_0.*

- *est **analytique dans un domaine** D si elle est analytique en tout point de D.*

- *est **entière** si elle est analytique en tout point de $\mathbb{C}$.*

Remarque 2 *1. il est clair que sur un domaine D: f analytique $\Leftrightarrow$ f est holomorphe.*

2. La fonction $f(z) = |z|^2$ est différentiable seulement au point z_0. Mais cette fonction n'est pas analytique au point z_0 car il n'existe pas de voisinage de z_0 ou la fonction est différentiable. On a donc : analycit $\Rightarrow$ différentiabilité. mais la réciproque est fausse.

Exemple 10 *De fonctions holomorphes (analytiques)*

1- Tout polynôme $P(z)$ est holomorphe (analytique) dans $\mathbb{C}$.

2- Toute fraction rationnelle $\frac{P(z)}{Q(z)}$ est holomorphe dans $\mathbf{C} \setminus \{\cup_{i=1}^{n} z_i\}$ ou les z_i sont les pôles de la fraction.

3-$e^z, \sin(z), \cos(z), sh(z), ch(z)$ sont holomorphe dans $\mathbb{C}$.

** $tan(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \left\{\cup_{k\in Z}(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$*

* $th(z)$ *est holomorphe dans* $\mathbb{C} \setminus \left\{ \cup_{k\in Z} (2k+1)\frac{\pi}{2i} \right\}$

0.3 Conditions de Cauchy-Riemann

Théorème 1 *Soit U un ouvert de* $\mathbb{C}$*, f une fonction complexe définie sur U, telle que* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *et soit* $z_0 = x_0 + iy_0$ *dans U.*

Les conditions suivantes sont équivalentes:

i- f est dérivable en z_0*.*

ii- U et V sont différentiables en (x_0,y_0) *et vérifient:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases} \qquad \cdots\cdots (E).$$

Les équations (E) s'appellent ***les équations de Cauchy- Riemann***

Dmonstration

1- Supposons que $lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existe, alors elle indépendante de la facon dont h tend vers 0:

<u>$1^{er}cas$</u>: Supposons que $h \to 0$ (sur l'axe réel),$h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(z) = lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}. \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \cdots\cdots (1) \end{aligned}$$

<u>$2^{er}cas$</u>: Supposons que h imaginaire pur, $(h \in \mathbb{IR})$ ie $h = it, t \in \mathbb{R}, h \to 0$ si $t \to 0$

$$\begin{aligned} f'(z) = lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= lim_{h\to 0}\frac{u(x,y+t)-u(x,y)}{it} + i\frac{v(x,y+t)-v(x,y)}{it}. \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y). \cdots\cdots (2) \end{aligned}$$

Par identification de 1 et 2, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

ii-Supposons que U et V sont différentiables en (x,y) et vérifient les équations de Cauchy-Riemann, on va montrer que f est dérivable en $z \in \mathbb{C}$.

puisque U et V sont différentiables en (x,y), on a:

$$u(x+s,y+t)-u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+\alpha(s,t)$$

où $lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{\|\alpha(s,t)\|}{\|(s,t)\|}=0$ et

$$v(x+s,y+t)-v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t+\beta(s,t)$$

où $lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{\|\beta(s,t)\|}{\|(s,t)\|}=0$

soit $h=s+it$ on a

$$\begin{aligned}
f(z+h)-f(z) &= (u(x+s,y+t)+iv(x+s,y+t))-(u(x,y)+iv(x,y)).\\
&= (u(x+s,y+t)-u(x,y))+i(v(x+s,y+t)-v(x,y))\\
&= (\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+\alpha(s,t))+i(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t+\beta(s,t))\\
&= (\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t)+i(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t)+(\alpha(s,t)+i\beta(s,t))\\
&= (\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t)+i(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t)+\eta(s,t),
\end{aligned}$$

$\eta(s,t)=\alpha(s,t)+i\beta(s,t)$ où $lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{\|\eta(s,t)\|}{\|(s,t)\|}=0$

En utilisant les équations de Cauchy- Riemann, on obtient

$$\begin{aligned}
f(z+h)-f(z) &= (\frac{\partial u}{\partial x}s-\frac{\partial v}{\partial x}t)+i(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial x}t)+\eta(s,t).\\
f(z+h)-f(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(s+it)+i(\frac{\partial v}{\partial x}(s+it))+\eta(s,t).\\
f(z+h)-f(z) &= (\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})(s+it)+\eta(s,t).\\
\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= (\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\eta(s,t)}{h}.
\end{aligned}$$

car $lim_{h\to0}\frac{\|\eta(s,t)\|}{\|(s,t)\|}=lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{\|\alpha(s,t)+i\beta(s,t)\|}{\|(s,t)\|}=0$ donc

$$lim_{h\to0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})=f^{'}(z)$$

On en déduit que f est dérivable en z, et que $f^{'}(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

Remarque 3 *Les conditions de* ***Cauchy-Riemann*** *ne sont pas* ***des conditions nécessaires*** *pour la* ***dérivabilité*** *des fonctions, c-à-d. : il existe des fonctions qui admettent des dérivées*

*partielles vérifiant les équations de Cauchy-Riemann sans être $\mathbb{C}$-**dérivables**.*
par exemple

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x.y)(x+iy)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y = (0,0) \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$$

Mais la limite $lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ *n'existe pas.*

On introduit les **opérateurs aux dérivées partielles** suivants

$$\begin{aligned} \frac{\partial .}{\partial z} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial .}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial .}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial .}{\partial x} - i\frac{\partial .}{\partial y}) \\ \frac{\partial .}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial .}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial .}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial .}{\partial x} + i\frac{\partial .}{\partial y}) \end{aligned}$$

On a la proposition suivante

Proposition 7 *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction dérivables en un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors on a*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) &= 0. \\ \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &= f'(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z}(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Remarque 4 *Les équations de **Cauchy -Riemann** traduisent le fait qu'une fonction holomorphe ne dépend pas de la variable $\overline{z}$ (condition suffissante pour l'holomorphie).*

Proposition 8 *Soient U un **ouvert connexe** de $\mathbb{C}$ et f est holomorphe. Les conditions suivantes sont **équivalentes**.*
1-f est constante sur U.
2- Re(f)est constante sur U.
3- Im(f)est constante sur U.
4-$|f|$ est constante sur U.
5-$\overline{f}$ est constante sur U.

Dmonstration
$1 \Rightarrow 2$: il est clair que si f est une fonction constante, alors les parties réelle et imaginaire sont constantes.
$2 \Rightarrow 3$ si $u(x,y) = constante$, alors $u_x = v_y = 0$ ce qui implique que $v_x = v_y = 0$, et par conséquent $v(x,y) = constante$.

$3 \Rightarrow 4$ la preuve est similaire à celle de $2 \Rightarrow 3$. $1 \Rightarrow 2$: on a $|f|^2 = u^2 + v^2 = constante$. En dérivant par rapport à x puis à y; et en utilisant les conditions de Cauchy Riemann, on trouve

$$uu_x - vu_y = 0$$

$$vu_x + uu_y = 0$$

La résolution de ce système donne

$$|f|^2 u_x = 0, |f|^2 u_y = 0$$

Comme $|f|^2 \neq 0$, il en rsulte $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$, ce qui prouve que $u(x,y) = v(x,y) = constante$. D'o f est constante.

Remarque 5 *Une autre formule des Equations de Cauchy-Riemann*
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z \in U$ on a:

$$f(z) = f(x,y) = f(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}).\\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}).
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u+iv) = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}.\\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{i}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial y}).\\
&= \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})\right].
\end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Donc, f est analytique sur $\mathbb{C}$

0.4 Fonctions harmoniques

Définition 6 *Soient U un ensemble de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dite de classe C^2 sur U si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent et sont continues pour tout x,y de U. On note par $f \in C^2(U,\mathbb{R})$.*

Définition 7 *$f \in C^2(U,\mathbb{R})$. On dit que f est **harmonique** dans U si pour tout $(x,y) \in U$ on a:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Notation. *La fonction $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est appelée le laplacien de f.*
On peut le noter aussi par $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ où $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exemple 11 *$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, où $f(x,y) = e^{-y}$. il est clair que cette fonction est dans $C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, de plus*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = -e^{-y}\sin x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = e^{-y}\sin x$$

Le laplacien $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$, ce qui montre que cette fonction est harmonique.

Théorème 2 *Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe sur $D \subset \mathbb{C}$. Alors les fonctions réelles u(x,y) et v(x,y) sont harmoniques.*

Démonstration. La fonction f est holomorphe, donc les équations de Cauchy Riemann sont satisfaites

$$u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{xy}$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy}$$

et donc $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ce qui prouve que la fonction réelle u(x,y) est harmonique.
Pour montrer que v(x,y) est harmonique on procède exactement de la même manière.

Exemple 12 *La fonction $w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ est entière et donc les fonctions $u(x,u) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$ sont nécessairement harmoniques sur tout domaine $U \subset \mathbb{C}$. En effet*

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0 - 0 = 0$$

Conjuguée harmonique Si $f(z) = u(x,u) + iv(x,y)$ est holomorphe dans un domaine D, alors u et v sont harmoniques dans D. Maintenant, supposons que $u(x,y)$ est une fonction réelle harmonique dans D. Si on peut trouver une fonction v(x,y) telle que $u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans D, alors v(x,y) sera apellée **la fonction conjuguée harmonique** de u(x,y).

Exemple 13
- *Vérifier que la fonction $u(x,y) = e^{-y}\sin x$ est harmonique dans $\mathbb{C}$.*
- *Trouver la conjuguée harmonique de u.*

Réponse. On a

$$u_x = e^{-y}\cos x, u_{xx} = -e^{-y}\sin x, u_y = -\sin x e^{-y}, u_{yy} = -\sin x e^{-y},$$

donc

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

- En utisant les équations de Cauchy-Riemann on a:$v_y = u_x = e^{-y}\cos x$ et $v_x = -u_y = \sin x e^{-y}$.En intégrant la premiére équation par rapport à y on obtient, $v(x,y) = -\cos x.e^{-y} + h(x)$.
  Maintenant $v_x(x,y) = \sin x.e^{-y} + h'(x) = -u_y = \sin x e^{-y}$ nous donne que $h'(x) = 0$ et donc $h(x) = C$. Donc la fonction harmonique conjuguée est $v(x,y) = -\cos x.e^{-y} + C$

0.5 Exercices

Execice 1 *Trouver les fonctions holomorphes et les non holomorphes, Puis donner la dérivée de celles qui sont holomorphes:*

- $f_1(z) = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$.
- $f_2(z) = 2x^2 + 2y^2 - x + i(4xy - y)$.
- $f_3(z) = z^2 + z + \ln z.(\Re(z) \succ 0)$.
- $f_4(z) = e^z + \overline{z} + \cos z$

Execice 2 *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ donnée par sa forme algébrique: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$*

- *Trouver toutes les fonctions f telle que:*
- $u(x,y) = 3x + 1$.
- $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$.
- $u(x,y) = -2xy$.
- $v(x,y) = e^x \sin y$.
- $v(x,y) = 2x + 2xy$.
- $v(x,y) = x^2 - y^2$.

Execice 3 *Pour quelles valeurs de λ les fonctions f sont-elles holomorphes*

- $f(z) = x + i\lambda y$.
- $f(z) = x^2 - y^2 + \lambda x + i(\lambda y + 2xy)$.
- $f(z) = \Re(\lambda)\Re(z) + i[\Im(\lambda) + 1]\Im(z)$.

Execice 4 *Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques.*

1. $u(x,y) = xy$.
2. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$.
3. $u(x,y) = e^x x \cos y - e^x y \sin y$.