Module : Analyse Complexe
Eenseignante : Fouzia Chita
Chapitre "1 " : Topologie dans le plan complexe

0.1 Propriétés algébriques des nombres complexes.

les nombres complexes sont apparus pour la première fois dès le XVIème siècle, dans les formules de Caradan et Tartaglia destinées résoudre l'équation du troisime degré $x^3 = px + q$ (on dit que Tartaglia envoya sa méthode Cardan qui se l'appropria ensuite) mais c'est sous la plume de Raffaile Boumbelli, en 1550, que le nom de nombre imaginaire futcité pour la première fois. La formule qui permet de calculer l'une des solutions de l'équation $x^3 = px + q$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

est connue sous le nom de formule de Cardan.
R. Boumbelli d'ecrit l'exemple de l'équation $x^3 = 15x + 4$ dont une racine réelle est donnée par la formule de Caradan:
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{(-121)}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{(-121)}}$ (expression qui aujourd'hui on ne se permettrait pas d'écrire...) or il a vu que 4 est une solution réelle de cette équation, et il émet l'hypothèse que les racines cubiques de $2 + \sqrt{-1}$ et $2 - \sqrt{-121}$ sont de la forme $2 \pm \alpha\sqrt{-1}$ et il trouve que $\alpha = 1$ convient ... Dès lors, l'expression précédente devient $2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$ et l'imaginaires disparaisissent.

C'est un peu plus tard, avec Gauss (1883) que les nombres complexes commencent à être étudiée pour eux mêmes, et non juste comme des quantités intermédiares à un calcul qui néssairement en disparaissent à la fin.

On muni $\mathbb{R}^2$ par les lois (l'addition et la multiplication) suivantes : Soient $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) + (u,v) = (x + u, y + v)$$

$$(x,y) \times (u,v) = (x.u - y.v, x.v + y.u)$$

Ces operations créent un corps commutatif, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes note par $(\mathbb{C}, +, \times)$
(0,0) est l'élément neutre pour l'addition.
(1,0) est l'élément neutre pour la multiplication.

- l'inversse multiplicatif de $(x,y) \neq (0,0)$ est $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$
- En identifiant $(x,0) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \in \mathbb{R}$, et en posant $i = (0,1)$ alors:

$$\mathbb{C} = \left\{ z, z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}$$

Notation 1 *Dans la suite, on notera par* $i = (0,1)$*, le nombre complexe solution de l'équation* $z^2 + 1 = 0$.

0.1.1 Représentation d'un nombre complexe

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme algébrique

$$z = x + iy$$

– Le nombre réel x est la partie **réelle** de z.

– Le nombre réel y est la partie **imaginaire** de z.

On note: $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$

Le conjugue d'un nombre complexe Soit $z = x + iy$ telsque $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Définition 1 *On appelée le conjugué de z le nombre complexe*

$$\overline{z} = x - iy$$

Proposition 1 *Soient $z_1,z_2 \in \mathbb{C}$ alors on a*

$$\begin{aligned} \forall z_1,z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1}\,\overline{z_2}. \\ \forall n \in \mathbb{N} : \overline{\alpha z} &= \alpha \overline{z}, \alpha \in \mathbb{R} \\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\overline{z}}, z \neq 0 \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Le Module d'un nombre complexe

Définition 2 *Le nombre réel positif*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

s'appelle le module de z

Proposition 2 $\forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}$ $\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}, |z| \geq 0, |\lambda z| = |\lambda|\,|z|. \\ |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \\ |\overline{z}| = |z|\,, \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0. \\ ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq ||z_1| + |z_2||. \end{cases}$

Exemple 1 *Si $a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, l'équation quadratique $az^2 + bz + c = 0$, admet toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$.*

$$z = \begin{cases} \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & ; \quad \Delta = b^2 - 4ac \succ 0. \\ \dfrac{-b}{2a} & ; \quad \Delta = b^2 - 4ac = 0. \\ \dfrac{-b \pm i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & ; \quad \Delta = b^2 - 4ac \prec 0. \end{cases}$$

Argument d'un nombre complexe

Définition 3 *L'argument d'un nombre complexe non nul z est une mesure de l'angle (i, V) ou V est le vecteur d'affixe z dans la base orthonormée (i,j) on le note* $\arg z$*, il défini à* 2π *prés la valeur particuliére appartenant l'intervalle* $]-\pi,\pi[$ *est appelé argument principale on notera par exemple*

$$\arg(z) = \theta + [2k\pi]$$

Proposition 3 *Pour tout* $z_1,z_2 \in \mathbb{C}$*, on a*

$$\begin{aligned} \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi \\ \arg z^n &= n \arg z + 2k\pi, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Forme trigonometrique

Puisque un nombre complexe $z = x + iy$ peut être considère comme un couple (x,y) alors on peut représenter de tels points du plan xoy appelé le plan complexe

$$z = x + iy = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Cette formule est appelée la forme **trigonométrique** de z ou **polaire**.

Formule de Moivre

Proposition 4 *Si* $\rho = 1$ *on obtient la formule dite de Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Racines n'ieme d'un nombre complexe

Définition 4 *Un nombre complexe* ***w*** *est appelé racine* ***nième*** *d'un nombre complexe z* ($z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$) *si* $w^n = z$.

D'aprés la formule de moivre:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\frac{\cos\theta + 2k\pi}{n} + i\frac{\sin\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0, \cdots, n-1.$$

Il ya **n** valeurs différent pour w_k, et leurs images forment un **polygone** de n cotês.

Exemple 2 *Les racines cubiques de l'unité* ($z^3 = 1$) *sont:*

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_3 &= \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{aligned}$$

0.2 Propriétés topologiques:

Définition 5 *Soit l'application:*

$$\begin{array}{rcl} d:\mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (z_1,z_2) & \longrightarrow & d(z_1,z_2)=|z_1-z_2| \end{array}$$

d est une distance sur $\mathbb{C}$.
*$\mathbb{C}$ muni de d est un espace **métrique** noté $(\mathbb{C},d)$.*

0.2.1 Ouverts et fermées de C

- l'ensemble $B(z_0,r)$ de centre z_0 et de rayon r

$$B=(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C},|z-z_0|\prec r\}$$

  est appelé **boule ouverte**.

- l'ensemble $B(z_0,r)$ de centre z_0 et de rayon r

$$B=(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C},|z-z_0|\leq r\}$$

  est appelé **boule fermée**.

- l'ensemble $S(z_0,r)$ de centre z_0 et de rayon r

$$S=(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C},|z-z_0|=r\}$$

  est appelé **sphère** de centre z_0 et de rayon r.

- Soit $U\subset\mathbb{C}$, U est appelé une partie ouverte de $\mathbb{C}$ (un ouvert de $\mathbb{C}$) ssi:

$$\forall z\in U,\exists\delta\succ 0,B(z,\delta)\subset U$$

- On dit que $F\subset\mathbb{C}$ est un fermé si et seulement si son complimentaire est ouvert.

- Soit $U\in\mathbb{C}$, U est borné si et seulement si $\exists M\succ 0,U\subset B(z_0,M)$

0.2.2 Voisinage d'un complexe

Définition 6 *On dit que le sous ensemble V de $\mathbb{C}$ est un voisinage du complexe z_0 si V contient une boule ouverte de centre z_0, i.e*

$$\exists r\in\mathbb{R}_+^*,B=(z_0,r)\subset V$$

Ensemble compact

$S\subset\mathbb{C}$, S est compact de $\mathbb{C}$ si et seulement si S est à la fois borné et fermé.

Ensemble connexe

$D \subset \mathbb{C}$, D est dit non connexe s'il existe deux ouverts A et B non vides tel que :
$$\begin{cases} D = A \cup B, \\ A \cap B = \emptyset. \end{cases}$$
Connexité par Arcs
Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe par arcs si deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin qui se trouve entièrementdans S.
Domaine
Toute partie de $\mathbb{C}$ est à la fois ouverte et connexe est appelée domaine.

0.3 L'infini en analyse complexe

Il souvent commode d'ajouter $\mathbb{C}$ un point l'infini noté ∞. L'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est appelé sphère de Riemann. nous le noterons $\overline{\mathbb{C}}$
Structure d'espace topologique.
On définit une topologie sur $\bar{\mathbb{C}}$ en disant que S est ouvert si

1. $S \cap \mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$

2. Si $\infty \in S, il existe R \succ 0$ telque $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}(0,R) \subset S$

Proposition 5 *On a les équivalances suivantes,*

1. *pour une suite de nombres complexes:*
$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$$
2. *pour une fonction dfinie au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$*
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$
3. *Pour une fonction dfinie pour $|z| \succ r$*
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = w_o$$
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Longleftrightarrow \lim_{z\to 0} \left[f(\frac{1}{z}) \right]^{-1}$$

Remarque 1 *On a par définition*
$$Z_n \longrightarrow \infty \quad et \quad w_n \longrightarrow a \Longrightarrow Z_n + w_n \longrightarrow \infty$$
$$Z_n \longrightarrow \infty \quad et \quad w_n \longrightarrow a \neq 0 \Longrightarrow Z_n w_n \longrightarrow \infty$$
Toute suite de points de $\overline{\mathbb{C}}$ contient donc une suite partielle convergeant vers un point de $\mathbb{C}$: Le plan achevé $\overline{\mathbb{C}}$ admet pour représentation géometrique une sphére (la sphre de Riemann) via la projection stéréograhique. Si
$$S^2 = \left\{ (\alpha,\beta,\gamma), \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \right\}$$
cette projection $S^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ est définie par les relations
$$\Re z = \frac{\alpha}{1-\gamma}, \Im z = \frac{\beta}{1-\gamma}$$

0.4 Exercices

Execice 1 *Mettre sous la forme $x+iy$, x, y réels, les expressions suivantes:*

$$(i)\frac{3+i}{3-2i},(ii)\frac{(2+i)(3+2i)}{1-i},(iii)(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^4,(iv)\ i^n,n\in N,(v)\ (1+i)^n+(1-i)^n,n\in\mathbb{N}$$

Execice 2 1. *Trouver la racine carrée du nombre complexe $a=5-12i$.*

2. *Trouver la racine d'ordre 3 du nombre complexe $b=1-i$.*
3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $2iz^2-3z+1-3i=0$.*

Execice 3 *Montrer que, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$:*

1. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$.
2. $||z_1|-|z_2||\leq|z_1-z_2|$.
3. $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.
4. $|z|^n=|z^n|,\forall n\in\mathbb{N}$.

Execice 4 *Soit $P(z)$ un polynôme d'ordre n à coefficients réels;*
Montrer que $\forall z\in\mathbb{C}:\overline{P(z)}=P(\overline{z})$ et $P(z)=0\Leftrightarrow P(\overline{z})=0$. Que deduire?

Execice 5 *Décrire les sous-ensembles $z\in\mathbb{C}$ déterminés par les conditions suivantes:*

$$(1)\,|z-i|\leq 1,\ (2)\ \left|\tfrac{z-1}{z+1}\right|=1,\ (3)\ \ |z-2|\succ|z-3|\,,\ (4)\ \Im(z)\succ 0,|z|\prec 1,\ (5)\ \tfrac{1}{z}=\overline{z},$$

$$(6)\,|z|^2=\Im(z).$$