الخصم والتكافؤ بفائدة مركبة

1. الخصم بالفائدة المركبة:

الخصم بالفائدة المركبة يتم تطبيقه بالنسبة للأوراق التجارية التي يكون استحقاقها أكثر من سنة، في الفائدة البسيطة نتحصل على الخصم من خلال الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية، نفس المبدأ سيتم تطبيقه في الفائدة المركبة.

وعليه فالخصم هو الفرق بين القيمة الاسمية للورقة (المبلغ المستحق في المستقبل)والقيمة الحالية بفائدة مركبة

وبناء عليه يمكن أن نكتب:

$$E_c = V_n - V = V(1+i) - V = V[(1+i) - 1]$$

$$E_c = V_n - V = V_n - V_n(1+i)^{-n} = V_n[1 - (1+i)^{-n}]$$

$$\boxed{E_c = V[(1+i) - 1]}$$

$$\boxed{E_c = V_n[1 - (1+i)^{-n}]}$$

مثال1:

ورقة تجارية قيمتها الاسمية 100000دج تستحق بعد 5 سنوات، تفاوضت بمعدل 4%.

أحسب قيمتها الحالية وقيمة الخصم.

$$V_n = V(1+i)^n \quad ;$$

$$V = V_n\,(1+i)^{-n} = 100000\,(1+0{,}04)^{-5} = 82192{,}71\ DA$$

القيمة الحالية للورقة التجارية هي 82192.71 دج

الخصم :

$$E_c = V_n - V = 100000 - 82192{,}72 = 17807{,}29\ DA$$

قيمة الخصم التجاري المطبق على الورقة التجارية هي: 17807.29 دج

مثال2:

فوضت ورقة تجارية قيمتها الاسمية 20000دج تستحق بعد 4 سنوات، خصمت بفائدة مركبة فكان مبلغ الخصم 3860دج.

أحسب معدل الخصم.

لدينا:

$$E_c = V_n[1-(1+i)^{-n}]$$
$$3860 = 20000[1-(1+i)^{-4}]$$
$$[1-(1+i)^{-4}] = \frac{3860}{20000} = 0{,}193$$
$$(1+i)^{-4} = 0{,}807$$
$$i = 0{,}807^{\frac{-1}{4}} - 1 = 0{,}055 = 5{,}5\%$$

معدل الخصم المطبق هو5,5%

2.تكافؤ الديون بفائدة مركبة:

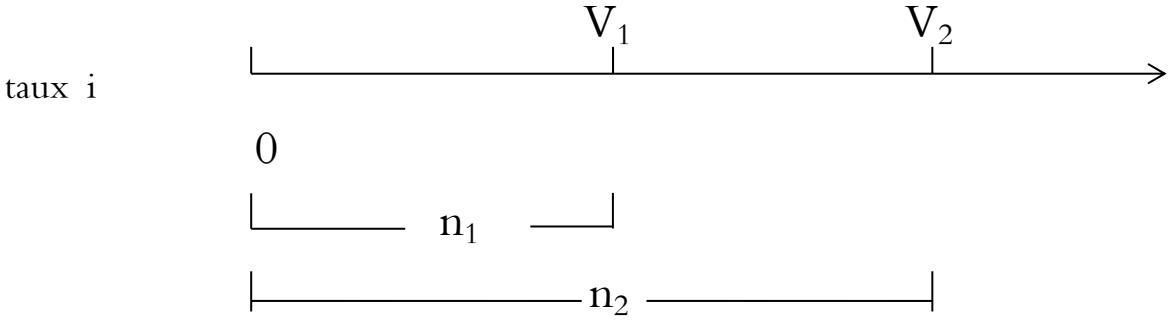
التكافؤ بفائدة مركبة يطبق في العمليات المتوسطة والطويلة الأجل، حيث نجد نفس مبدأ التكافؤ بالفائدة البسيطة.

تتكافأ الديون أو الأوراق التجارية بفائدة مركبة إذا تساوت القيم الحالية في تاريخ معين يسمى تاريخ التكافؤ وبوجود نفس معدل الخصم.

1.2 تكافؤ ورقتين تجاريتين أو رأس مالين:

يتكافأ رأس مالين (أو ورقتين تجاريتين) بفائدة مركبة في تاريخ معين إذا خصما بفائدة مركبة وبنفس المعدل وكان لهما نفس القيمة الحالية في هذا التاريخ.

إذا كانتV_1 , V_2 القيمتين الإسميتين لورقتين تجاريتين تستحقان في n_1 و n_2 خصمتا بمعدلi:

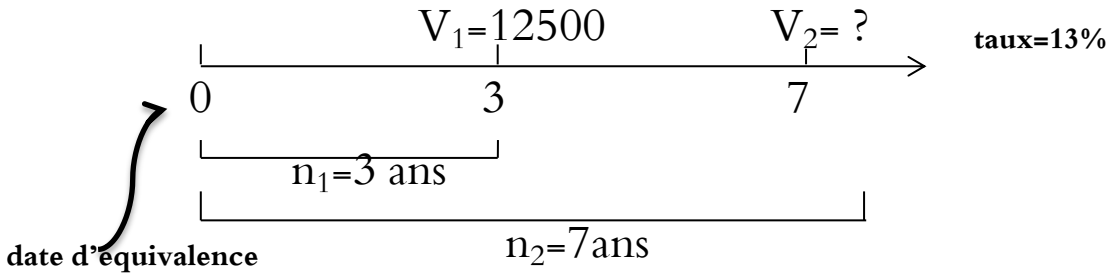


نقول أن الورقتين التجاريتين متكافئتين إذ وفقط إذا كان:

$$\boldsymbol{V_1(1+i)^{-n_1} = V_2(1+i)^{-n_2}}$$

مثال:

ورقة تجارية قيمتها الإسمية 12500دج تستحق بعد 3 سنوات عوضت بورقة تجارية أخرى تستحق بعد 7 سنوات، أحسب القيمة الإسمية للورقة الجديدة بمعدل خصم 13%.



في تاريخ التكافؤ نجد:

$$V_1(1+i)^{-n_1} = V_2(1+i)^{-n_2}$$
$$12500(1+0{,}13)^{-3} = V_2(1+0{,}13)^{-7}$$
$$V_2 = \frac{12500(1+0{,}13)^{-3}}{(1+0{,}13)^{-7}} = 12500(1.13)^4$$
$$V_2 = 20380{,}92\ da$$

في الزمن 0 الورقتين التجاريتين 12500دج و 20380.92 لهما نفس القيمة الحالية بمعدل خصم 13 %، ويمكننا التأكد كما يلي:

$$12500(1{,}13)^{-3} = 8663{,}13 \text{ da}$$
$$20380{,}92(1{,}13)^{-7} = 8663{,}13 \text{ da}$$

2.2 تكافؤ ورقة تجارية (رأس مال)مع مجموعة من الأوراق التجارية(أو رؤوس الأموال):

تتكافأ ورقة تجارية (أو رأس مال) مع مجموعة من الأوراق التجارية في تاريخ معين إذا تساوت القيمة الحالية للورقة التجارية مع مجموع القيم الحالية للأوراق التجارية(أو رؤوس الأموال) بنفس معدل الخصم.

$$\boldsymbol{V_{a_i} = \sum_{i=1}^{k} V_{a_i}`}$$

$$V(1+i)^{-n} = V_1(1+i)^{-n_1} + V_2(1+i)^{-n_2} + \cdots .. + V_k(1+i)^{-n_k}$$

مثال:

شخص مدين بالمبالغ التالية:

10000دج واجبة الدفع بعد 4 سنوات

20000دج واجبة الدفع بعد سنتين

اتفق الطرفان على تسديد الدين بعد 3 سنوات.

أحسب مبلغ الدين الجديد إذا كان معدل الفائدة 6%.

الحل:

في تاريخ التكافؤ نجد:

$$V(1+i)^{-n} = V_1(1+i)^{-n_1} + V_2(1+i)^{-n_2}$$

$$V(1+0{,}06)^{-3} = 10000(1+0{,}06)^{-4} + 20000(1+0{,}06)^{-2}$$

$$1{,}06^{-3}V = 7920{,}936 + 17799{,}928$$

$$V = \frac{25720{,}865}{1{,}06^{-3}} = 30633.96 \text{ DA}$$

3.2 تكافؤ مجموعة أوراق تجارية (أو رؤوس الأموال):

تكون مجموعة من الأوراق التجارية(أو رؤوس الأموال) متكافئة مع مجموعة أخرى إذا تساوت مجموع القيم الحالية للمجموعة الأولى مع مجموع القيم الحالية للمجموعة الثانية بنفس معدل الخصم.

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{V_{a_i}} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{V_{a_i}`}$$

$$V_1(1+i)^{-n_1} + V_2(1+i)^{-n_2} + \cdots + V_k(1+i)^{-n_k} = V_1`(1+i)^{-n_1`} + V_2`(1+i)^{-n_2`} + \cdots + V_k`(1+i)^{-n_k`}$$

مثال:

نريد تعويض الورقتين التجاريتين التاليتين:

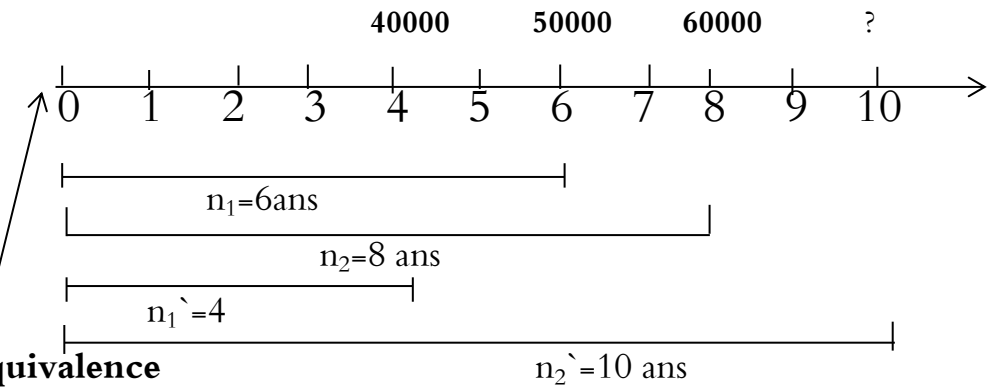
50000دج تستحق الدفع بعد 6 سنوات.

60000دج تستحق الدفع بعد 8 سنوات.

بورقتين تجاريتين الأولى قيمتها 40000دج تدفع بعد 4 سنوات والثانية تدفع بعد 10 سنوات بمعدل خصم 6%.

المطلوب: أحسب القيمة الاسمية للورقة التجارية الثانية.

الحل:



في تاريخ التكافؤ:

$$V_1(1+i)^{-n_1} + V_2(1+i)^{-n_2} = V_1`(1+i)^{-n_1`} + V_2`(1+i)^{-n_2`}$$

$$\mathbf{50000(1+0,06)^{-6} + 60000(1+0,06)^{-8} = 40000\ (1+0,06)^{-4} + V_2`(1+0,06)^{-10}}$$

$$V_2` = 73799{,}0835\ DA$$

4.2 تاريخ الاستحقاق المتوسط وتاريخ الاستحقاق المتوسط:

يتعلق الأمر بتعويض مجموعة من الأوراق التجارية(أو رؤوس الأموال) بورقة تجارية واحدة.

-إذا كانت القيمة الاسمية للورقة التجارية الوحيدة لا تساوي مجموع القيم الاسمية للأوراق التجارية، هذا يعني أنه **تاريخ استحقاق مشترك**. $V \neq V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_k$

-أما إذا كانت القيمة الاسمية للورقة التجارية الوحيدة تساوي مجموع القيم الاسمية للأوراق التجارية، هذا يعني أنه **تاريخ استحقاق متوسط** $V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_k$

مثال1:

حدد تاريخ الاستحقاق المشترك لدين قيمته 50000دج يعوض ثلاثة ديون وهي كما يلي:

10000دج تستحق بعد 6 أشهر

18000دج تستحق بعد 18 أشهر.

20000دج تستحق بعد 30 شهر.

بمعدل سداسي 2.5%

بما أن معدل الفائدة سداسي يجب تحويل المدة إلى سداسيات.

n_1=6mois=**1** semestre, n_2=18mois=**3** semestres, n_3=30mois=**5** semestres

في تاريخ التكافؤ نجد:

$$V(1+i)^{-n} = V_1(1+i)^{-n_1} + V_2(1+i)^{-n_2} + V_3(1+i)^{-n_3}$$

$$50000(1+0{,}025)^{-n} = 10000(1+0{,}025)^{-1} + 18000(1+0{,}025)^{-3} + 20000(1+0{,}025)^{-5}$$

$$1{,}025^{-n} = 0{,}882959$$

من الجدول المالي رقم 02 نجد أن $5 < n < 6$ سداسيات

باستخدام طريقة التناسب نجد:

$$(1{,}025)^{-5} = 0{,}883854$$

$$(1{,}025)^{-6} = 0{,}862296$$

$$n = 5 + (6-5)\frac{0{,}883854 - 0{,}882959}{0{,}883854 - 0{,}862296} = 5{,}041$$

باستعمال اللوغاريتم النيبيري:

$$1{,}025^{-n} = 0{,}882959$$

$$Ln1{,}025^{-n} = Ln0{,}882959$$
$$n = -\frac{Ln0{,}882959}{Ln1{,}025} = 5{,}041$$

تاريخ الاستحقاق المشترك محصور بين 5 سداسيات و6 سداسيات وهو 5سداسيات و7 أيام

مثال2: شخص مدين كالآتي:

2000دج تستحق بعد سنة

4000دج تستحق بعدسنتين

3000دج تستحق بعد 3 سنوات.

يريد تعوض هذه الديون بدين واحد قيمته 9000دج بمعدل 4% .حدد تاريخ استحقاق الدين الجديد.

الحل:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 2000 + 4000 + 3000 = 9000$$

بما أن القيمة الاسمية للدين الجديد تساوي مجموع القيم الاسمية للديون الثلاثة فتاريخ الاستحقاق المعني هو تاريخ استحقاق متوسط

في تاريخ التكافؤ نجد:

$$V(1+i)^{-n} = V_1(1+i)^{-n_1} + V_2(1+i)^{-n_2} + V_3(1+i)^{-n_3}$$
$$9000(1+0{,}04)^{-n} = 2000(1+0{,}04)^{-1} + 4000(1+0{,}04)^{-3} + 3000(1+0{,}04)^{-3}$$
$$1{,}04^{-n} = \frac{8288.29}{9000} = 0{,}920921.$$

باستعمال اللوغاريتم النيبيري نجد:

$$Ln1{,}04^{-n} = Ln0{,}920921$$
$$n = \frac{Ln0{,}920921}{Ln1{,}04} = 2{,}1 = 2 + 0{,}1 \times 360 = 2ans + 36jours$$

باستخدام طريقة التناسب نجد:

$$(1{,}04)^{-2} = 0{,}924556$$
$$(1{,}04)^{-3} = 0{,}888996$$
$$n = 2 + (3-2)\frac{0{,}924556 - 0{,}920921}{0{,}924556 - 0{,}888996} = 2{,}1 = 2 + 360 \times 0{,}1$$
$$= 2 + 36j$$

تاريخ الاستحقاق المتوسط هو سنتين وشهر و 6 أيام.