الفصــل الرابــع: الفائـدة المركبـة
L’intérêt Composé

1. تعريف الفائدة المركبة:

الفائدة المركبة هي تلك الفائدة الناتجة عن إضافة الفائدة البسيطة للفترة إلى الأصل لكي تنتج بدورها رأس مال جديد للفترة الموالية يعرف بالجملة.

وهذه العملية التي تعتمد على إضافة الفائدة إلى رأس المال تسمى الرسملة **La capitalisation** .

2. القانون الأساسي للفائدة المركبة:

إذا كان C_0 هو المبلغ الموظف، i هو معدل التوظيف، n هي مدة التوظيف

فإن القيمة المحصلة (الجملة) C_n تحسب كما يوضحه الجدول التالي:

الفترة	رأس المال الموظف في بداية الفترة	فائدة الفترة	القيمة المحصلة في نهاية الفترة
1	C_0	$C_0.i.1$	$C_0+C_0.i=C_0(1+i)$
2	$C_0(1+i)$	$C_0(1+i).i.1$	$C_0(1+i)+C_0(1+i).i=C_0(1+i)^2$
3	$C_0(1+i)^2$	$C_0(1+i)^2.i.1$	$C_0(1+i)^2+C_0(1+i)^2.i=C_0(1+i)^3$
.			
.			
.			
n−1	$C_0(1+i)^{n-2}$	$C_0(1+i)^{n-2}.i.1$	$C_0(1+i)^{n-2}+C_0(1+i)^{n-2}.i=C_0(1+i)^{n-1}$
N	$C_0(1+i)^{n-1}$	$C_0(1+i)^{n-1}.i.1$	$C_0(1+i)^{n-1}+C_0(1+i)^{n-1}.i=C_0(1+i)^n$

وعليه تكون القيمة المحصلة بعد n فترة من التوظيف كما يلي:

$$C_n=C_0(1+i)^n \quad ; C_n=C(1+i)^n$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_n=C(1+i)^n}}$$

القيمة الحالية: وهي قيمة المبلغ المستثمر في بداية المدة، أي أنها القيمة الأصلية لرأس مال عرفت قيمته في نهاية مدة توظيفه.

وبناء عليه تتحدد لقيمة الحالية بالعلاقة التالية:

$$C=\frac{C^n}{(1+i)^n}=\boldsymbol{C_n(1+i)^{-n}}$$

$$\boxed{\mathrm{C}=\boldsymbol{C_n(1+i)^{-n}}}$$

مثال:

ما هي جملة أصل قدره 12000دج مودع في البنك لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة 4% للسداسي؟

نقوم بتحويل المدة إلى سداسيات لأن المعدل سداسي (رسملة الفوائد سداسية)

n=5×2=10 semestres

$$C_{10} = 12000(1+0{,}04)^{10} = 12000 \times 1{,}480244$$
$$\boldsymbol{C_{10} = 17762,92\ DA}$$

3. ملاحظات هامة

أ- للحصول على العلاقة الأساسية للفائدة المركبة $\boldsymbol{C_n = C(1+i)^n}$ افترضنا أن : رسملة الفوائد سنوية، معدل الفائدة سنوي والمدة معبر عنها بالسنوات كذلك.

ب-إن معدل التوظيف ومدة التوظيف **يتبعان الرسملة**؛

ويمكن أن نتحصل على الفائدة كما يلي:

$$\boldsymbol{I = C_n - C}$$

$$\text{I}= C(1+i)^n - C = C[(1+i)^n - 1]$$

$$I = \boldsymbol{C[(1+i)^n - 1]}$$

أو:

$$I = C_n - C_n(1+i)^{-n} = C_n[1-(1+i)^{-n}]$$

$$I = \boldsymbol{C[(1+i)^n - 1]}$$
$$\boldsymbol{I = C_n[1-(1+i)^{-n}]}$$

النتائج يمكن الوصول إليها باستخدام الآلة الحاسبة أو باستخدام الجداول المالية:

$(1+i)^n$ → **la table financière n°1**

$(1+i)^{-n}$ → **la table financière n°2**

4. استعمال قانون الفائدة المركبة:

1.4 معدل الفائدة:

مثال:

رأس مال قدره 30000دج أودع البنك بمعدل فائدة مركبة لمدة 4 سنوات لتكون جملته 40438.08دج، أحسب معدل الفائدة المستعمل.

لدينا: C=30000 da , n= 4 ans, C_n= 40438,04 da , i= ?

$$\boldsymbol{C_n = C(1+i)^n \Leftrightarrow \; ; \; (1+i)^n = \frac{C_n}{C}}$$

$$(1+i)^4 = \frac{40438,04}{30000} = 1,347936$$

من الجدول المالي رقم 01 نجد أن : $i = 7,75\%$

أو نستعمل الطريقة الرياضية كما يلي:

$$i = \left[\frac{C_n}{C}\right]^{\frac{1}{n}} - 1 = \left[\frac{40438,04}{30000}\right]^{\frac{1}{4}} - 1 = [1,347936]^{\frac{1}{4}} - 1 = 0.0775.$$

$$\boldsymbol{i = 7.75\%}$$

2.4 مدة التوظيف:

مبلغ قدره 20000 دج أودع لمدة معينة بمعدل فائدة 6% سنويا، ليعطي جملة قدرها 26764.52 دج

المطلوب: تحديد هذه المدة.

لدينا: C=20000 da , n= ?, C_n= 26764,52 da , i= 0,06

$$\boldsymbol{C_n = C(1+i)^n} \Leftrightarrow 26764.52 = 20000(1+0,06)^n$$

$$(1+0,06)^n = \frac{26764.52}{20000} = 1,338226$$

من الجدول المالي رقم 01 نجد أن: **n= 5ans**

أو: باستعمال اللوغاريتم النبيري نجد:

$$1,06^n = 1,338226$$

$$Ln1,06^n = Ln1,338226 \Leftrightarrow n = \frac{Ln1,338226}{Ln\ 1,06} = \frac{0,291345}{0,058269}$$

$$\boldsymbol{n = 5\ ans}$$

5. طريقة التناسب في حساب معدل الفائدة:

تستخدم طريقة التناسب باستخدام الجداول المالية في حالة عدم وجود المعدل في الجدول المالي أي أن يكون محصور بين معدلين.

مثال: حدد معدل الفائدة الذي بموجبه تصبح قيمة 10000دج بعد 10 سنوات جملة بمقدار 25000دج.

لدينا: C=10000 da , n= 10 ans, C_n= 25000 da , i= ?

$$\boldsymbol{C_n = C(1+i)^n} \Leftrightarrow 25000 = 10000(1+i)^{10}$$

$$(1+i)^{10} = \frac{25000}{10000} = 2,5$$

من الجدول المالي رقم 01نجد أن: $9.5\% < i < 9,75\%$

$$(1+\mathbf{0.0975})^{10} = 2,535393$$

$$(1+\mathbf{0.095})^{10} = 2,478228$$

الفرق بين **القيمتين المجدولتين**: ***0,057165*** = *0,0025*

الفرق بين **القيمة المحسوبة** والقيمة **الصغرى المجدولة**:***2,5−2,478228=0,021772***

$$i = 0{,}095 + (0{,}0975 - 0{,}095) \times \frac{2{,}5-2{,}478228}{2{,}535393-2{,}478228}$$

$$= 0{,}095 + 0{,}0025 \times \frac{0{,}021772}{0{,}057165} = 0{,}09595$$

$$\boxed{\boldsymbol{i = 9{,}595\%}}$$

6. المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة:

1.6 معدل الفائدة المتناسب:

يكون معدلان يتميان لفترتين مختلفتين متناسبين إذا تساوت النسبة بينهما مع النسبة بين فترتيهما

لحساب المعدل المتناسب يكفي أن نقسم المعدل السنوي على عدد الفترات الموجودة في السنة.

المعدل السداسي المتناسب= $\frac{\text{المعدل السنوي}}{2} = \boldsymbol{\frac{i_a}{2}}$

المعدل الثلاثي المتناسب= $\frac{\text{المعدل السنوي}}{4} = \boldsymbol{\frac{i_a}{4}}$

المعدل الشهري المتناسب= $\frac{\text{المعدل السنوي}}{12} = \boldsymbol{\frac{i_a}{12}}$

2.6 المعدل المتكافئ:

المعدل المتكافئ لمعدل سنوي معين هو المعدل الذي يعطي نفس الجملة –لنفس المبلغ – لفترة زمنية معينة للتوظيف. ويمكن حساب المعدل المتكافئ بالعلاقة التالية:

$$C(1+i_a)^1 = C(1+i_k)^k$$

$$1 + i_a = (1+i_k)^k$$

$$i_k = (1+i_a)^{\frac{1}{k}} - 1$$

مثال: أحسب المعدلات المتناسبة والمتكافئة لمعدل سنوي **10%**

المعدلات المتناسبة لمعدل 10%

المعدل السداسي المتناسب= $\frac{\text{المعدل السنوي}}{2} = \frac{a}{2} = \frac{10}{2} = \mathbf{5\%}$

المعدل الثلاثي المتناسب= $\frac{\text{المعدل السنوي}}{4} = \frac{i_a}{4} = \frac{10}{4} = \mathbf{2.5\%}$

المعدل الشهري المتناسب= $\frac{\text{المعدل السنوي}}{12} = \frac{i_a}{12} = \frac{10}{12} = \mathbf{0.83\%}$

المعدلات المتكافئة لمعدل 10%

$$1 + i_a = (1+i_k)^k$$

المعدل **السداسي** المتكافئ:

$$1 + i_a = (1+i_2)^2 \Leftrightarrow i_2 = (1+i_a)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1+0{,}1)^{\frac{1}{2}} - 1 = \ 0{,}048\ ,$$

$$\boldsymbol{i_2 = 4.8\%}$$

المعدل **الثلاثي** المتكافئ:

$$1 + i_a = (1 + i_4)^4 \underset{;}{\Leftrightarrow} i_4 = (1 + i_a)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{4}} - 1 = \ 0{,}024\ ,$$

$$\boldsymbol{i_2 = 2, 4\%}$$

المعدل **الشهري** المتكافئ:

$$1 + i_a = (1 + i_{12})^{124} \underset{;}{\Leftrightarrow} i_{12} = (1 + i_a)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$= (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{12}} - 1 = \ 0{,}008,\ \boldsymbol{i_{12} = 0, 8\%}$$