المبحث 1. **التوزيعات لاحتمالية المتقطعة الأكثر استخداما**

التوزيع الهندسي الزائد، التوزيع الهندسي الزائد المتعدد، توزيع برنولي، التوزيع الثنائي، التوزيع الثنائي السالب (باسكال)، التوزيع الهندسي، التوزيع المتعدد، توزيع بواسون.

تستخدم التوزيعات في حل العديد من المسائل في مجال التسيير الصناعي والتجاري وفي الإدارة. ومن أكثر هذه التوزيعات شيوعا: التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون. في نهاية المحاضرة يفترض أن يكون الطالب قادرا على استذكار القوانين المدروسة وخصائصها الأساسية، ومن خلال التطبيقات يفترض أن يتمكن من معرفة متى وكيف يمكن استخدام كل قانون.

1 **توزيع برنولي** Distribution de Bernoulli

(أ) **استنتاج صيغة قانون برنولي**

نقول عن تجربة أنها "برنولية" إذا كانت تحتمل نتيجتين (حدثين) متنافيتين A و'A. نسمي A نجاح و'A فشل.

نعتبر المتغيرة ع X التي تمثل **عدد مرات النجاح**، تأخذ X القيمة 1 عند تحقق الحدث A و0 في الحالة المعاكسة.

نرمز عادة ب p "احتمال النجاح" لاحتمال تحقق الحدث A و q = 1 - p احتمال الحدث المعاكس (الفشل). يعين توزيع برنولي كما يلي :

$$\boxed{P(X=1)=p, \qquad P(X=0)=q, \qquad X=0,1.}$$

ونكتب $\mathbf{X \sim B(1, p)}$

(ب) **خصائص توزيع برنولي**

$E(X) = \Sigma x_i p_i = 1.p + 0.q = p \quad => \qquad E(X) = p.$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (1^2.p + 0^2.q) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq => \quad \mathbf{V(X) = qp.}$

الدالة المتجددة للعزوم $M(t) = E(e^{xt}) = e^{0t}q + e^{1t}p => \quad \mathbf{M(t) = q + pe^t}.$

معامل التماثل

$$\mu_3 = \sum (x-\mu)^3 p(x) = (0-p)^3 q + (1-p)^3 p = pq^3 - qp^3 = qp(q^2-p^2)$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{qp(q^2-p^2)}{qp\sqrt{qp}} \qquad = \frac{q^2-p^2}{\sqrt{qp}}$$

2 **التوزيع الثنائي** Distribution binomiale

(أ) **استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي:**

إذا كررنا تجربة برنولي n مرة فإن X (عدد مرات النجاح) تأخذ القيم: $X = 0, 1, 2, 3, \ldots n$

لنفترض التجربة البرنولية رمي قطعة نقدية مكررة عدد n من المرات، وX عدد مرات الحصول على صورة (F):

حالة : $n = 2$ $\qquad X = 0, 1, 2.$

$P(X = 0) = q*q = q^2, \quad P(X=1) = P(FP) + P(PF) = p*q + q*p = \mathbf{2p^1q^1}$

حالة : $n = 3$ $X = 0, 1, 2, 3.$

$P(X=3) = P(FFF) = p*p*p = p^3$, $P(X=2) = P(FFP \text{ ou } PFF \text{ ou } FPF) = \mathbf{3p^2q^1}$

حالة : $n = 4$ $X = 0, 1, 2, 3, 4.$

$P(X=3) = P(FFFP \text{ ou } PFFF \text{ ou } FPFF \text{ ou } FFPF) = \mathbf{4\, p^3q^1}$

في النتيجة الأخيرة نلاحظ العدد 3 هو x ، العدد 1 هو n-x ، والعدد 4 هو عدد الطرق الملائمة للحصول على ثلاث نجاحات من بين (n=4) تجارب، ويمكن حسابه كما يلي:

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

وبالتالي فاحتمال عدد ما x من النجاحات من بين n تجربة برنولية يحسب كما يلي:

$$\boxed{P(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x}, \qquad x = 0,1,2,3,\ldots,n \qquad , \qquad n = 1,2,3,\ldots}$$

حيث x عدد مرات النجاح، p احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عند تكرار التجربة)، q = 1-p احتمال الفشل وn عدد التجارب. و هو تعريف " قانون التوزيع الثنائي" ويكتب قانون التوزيع الاحتمالي أيضا كما يلي:

$$P(X=x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

أو $\mathbf{X \sim B(n, p)}$.

ب) شروط استخدام التوزيع الثنائي

- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات
- احتمال النجاح في التجربة ثابت (التجارب مستقلة)

مثال : أحسب عند رمي قطعة نقدية متوازنة 4 مرات احتمال الحصول على:

ولا مرة صورة، مرة واحدة، مرتين، 3 مرات، 4 مرات.

$P(X = x) = C^x_n\ p^x q^{n-x} \Rightarrow P(X = 0) = C^0_4\ 0.5^0\, 0.5^4 = 1/16$

$P(X = 1) = C^1_4\ 0.5^1\, 0.5^3$ $\qquad P(X = 2) = C^2_4\ 0.5^2\, 0.5^2$

مثال 2: نسحب بالإرجاع 3 كريات من صندوق يحتوي 5 كريات منها 3 حمراء.

أحسب احتمال الحصول على كريتين حمراء.

$P(X=2) = C^2_3\ (3/5)^2\, (2/5)^1$

ج) خصائص التوزيع الثنائي

التوقع والتباين: يمكن اعتبار X مجموع متغيرات مستقلة برنولية $X = X_1 + X_2 + \ldots X_i + \ldots + X_n$ لها نفس المعلم p وبالتالي نفس التوقع $(E(Xi) = p)$ أيضا. إذا باستخدام خصائص التوقع والتباين نجد:

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots X_i + \ldots + X_n) = \Sigma E(Xi) = \Sigma pi = n\,p \Rightarrow \mathbf{E(X) = np}$

$V(X) = V(X_1 + X_2 + \ldots X_i + \ldots + X_n)$,

Xi مستقلة إذن $V(X) = \Sigma V(Xi) = \Sigma pq \Rightarrow \mathbf{V(X) = npq}$

مثال: أحسب التوقع والتباين للمثال السابق :

الدالة المتجددة للعزوم: باعتبار X مجموع متغيرات برنولية مستقلة $X = X_1 + X_2 + \ldots X_i + \ldots + X_n$ لها نفس المعلم p ونفس الدالة المتجددة للعزوم: $\mathbf{M_X(t) = [q + pe^t]}$ وباستخدام النظرية السابقة بخصوص الدالة م للعزوم:

"من أجل X_1 وX_2 م ع مستقلة لها الدالة م للعزوم $M_{x1}(t)$ و$M_{x2}(t)$ فإن: $M_{x1+x2}(t) = M_{x1}(t).\ M_{x2}(t)$"؛ نستنتج:

$$M_X(t) = M_{x=x1+x2+\dots xn}(t) = M_{x1}(t)\ .\ M_{x2}(t) \dots M_{xn}(t)$$

$$M_X(t)= E(e^{x1t})\ .\ E(e^{x2t}) \dots E(e^{xnt}) \Rightarrow \qquad \mathbf{M_X(t) = [q + pe^t]^n}$$

معامل التماثل

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \qquad \mu_3 = \sum (x-\mu)^3\, p(x) = \sum (x-np)^3\, p(x) = \dots = npq(q-p)$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = \frac{npq[(1-p)-p]}{npq\sqrt{npq}} = \frac{1-2p}{\sigma}\ \ ou\, encore:\ \ \alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

يكون منحنى التوزيع الثنائي متماثلا عندما $\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2p = 1 \Rightarrow p = ½$

معامل التفلطح

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{\sqrt{npq}}$$

يكون منحنى التوزيع معتدلا عندما $\alpha_4 = 3 \Rightarrow qp = 1/6$

3 توزيع بواسون[1] Distribution de Poisson

أ) استنتاج صيغة قانون توزيع بواسن

لتكن لدينا تجربة برنولية مكررة عدد كبير جدا أو لانهائي من المرات. مبدئيا المتغيرة X التي تمثل عدد النجاحات تتبع التوزيع الثنائي، لكن قد يصعب حساب الاحتمال باستعمال صيغة هذا التوزيع عندما تكون n كبيرة. مثلا إحتمال 20 نجاح إذا كانت n = 100 هو: $P(20) = C_{100}^{20} \cdot 0.001^{20} \cdot 0.999^{80}$.

عندما تتكرر التجربة باستمرار؛ يصبح عدد مرات تكرار التجربة مقاسا بالزمن، ويكون احتمال تحقق الحدث في لحظة زمن صغيرا جدا. نحتاج في هذه الحالة إلى إيجاد صيغة عامة تعادل صيغة التوزيع الثنائي عندما n يؤول إلى ∞ .

نضع λ ثابت بحيث $p = \lambda/n$:

$$p(x) = C_n^x \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$p(x) = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$p(x) = \frac{\frac{n}{n}\,\frac{(n-1)}{n}\,\frac{(n-2)}{n}.....\frac{(n-x+1)}{n}}{x!} \lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).....\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!} \lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

---

[1] باسم سيميون دونيز بواسون Siméon-Denis Poisson (1781-1840) الفيزيائي و الرياضي الفرنسي الذي استخدم هذا لقانون سنة 1837 في كتابه بحث في احتمال الأحكام في مجال الجريمة و في المجال المدني (Recherche sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile) حيث أدخل كنهاية لقانون باسكال والقانون الثنائي. إلا أن أول استعمال له للقانون الذي يحمل اسمه يعود إلى 1830. تجدر الإشارة إلى أن بواسون صاحب الفضل في نظرية مهمة أخرى هي نظرية الأعداد الكبيرة التي تنسب لشيبيشيف. أنظر ج ج دراوزبيك [1997].

$$n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{2}{n} = ... = 0 \Rightarrow p(x) = \frac{1}{x!}\lambda^x (1-\frac{\lambda}{n})^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!}(1-\frac{\lambda}{n})^n (1-\frac{\lambda}{n})^{-x}$$

لكن : $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ وبما أن $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = (1-0)^{-x} = 1$:فإن

$$\boxed{p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,...}$$

و هو احتمال x نجاح في وحدة زمن واحدة حسب توزيع بواسون حيث **$\lambda > 0$**. ونكتب **$X \sim P(\lambda)$**

ملاحظة: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828...$

(ب) خصائص توزيع بواسون

$$E(X) = V(X) = \lambda \quad , \quad M(t) = \exp\left[\lambda(e^t - 1)\right] \; , \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \alpha_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

(ج) حساب احتمال عدد من الأحداث في t وحدة زمن.

من أجل عدد أو مقدار t من وحدات الزمن نعوض λ ب λt فنجد:

$$P_t(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \qquad X = 0,\ 1,\ 2, 3, \ldots$$

مثال. بفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل λ=5 في الثانية.
أحسب احتمال وصول 7 مكالمات في ثانية ونصف.

$$t\lambda = 1.5(5) \qquad P(X = 7) = \frac{(1.5(5))^7 e^{-1.5(7)}}{7!}$$

(د) حساب احتمال عدد من الأحداث من فئة معينة.

إذا كان X يتبع توزيع بواسون بمعدل λ، فإن Y= aX هو الآخر يتبع توزيع بواسون بمعدل aλ.

مثال. بفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل λ=5 في ثانية، وأن 6% من هذه المكالمات هي مكالمات دولية. أحسب احتمال أن تصل 9 مكالمات دولية في ثانية.

$$P(X = 9) = \frac{(0.05(5))^9 e^{-0.05(5)}}{9!}$$

(هـ) استخدام توزيع بواسون بدلا من التوزيع الثنائي.

عندما n→∞ والمتوسط ثابت يؤول التوزيع الثنائي إلى التوزيع بواسون. عمليا يعطي توزيع بواسون نتائج قريبة من التوزيع الثنائي لما:

$n \geq 30$ و **$np < 5$** أو **$nq < 5$**

ويستخدم بعض من الإحصائيين أيضا كشرط لاستعمال قانون بواسون بدلا من القانون الثنائي القاعدة التالية[1]:

$$\mathbf{p \leq 0,1} \quad \text{و} \quad \mathbf{n \geq 25}$$

مثال : نأخذ عشوائيا 10 وحدات من انتاج آلة نسبة إنتاجها التالف 10 % . أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتان.

$$P(X = 2) = C^2_{10}\,(0,1^2)\,(0.9^8) = \mathbf{0.1937}$$

ط2. باستعمال توزيع بواسون: نحسب أولا قيمة المعلمة λ (معلمة قانون بواسون):

$\lambda = \mu = np = 10 * 0,1 = 1$

$P(2) = \lambda^x * e^{-\lambda}/x! = (1^2 * e^{-1}) / 2! = 1/(2e) = \mathbf{1,1839}$

(و) الاستخدام العملي لتوزيع بواسون

ظل توزيع بواسون لفترة طويلة يستعمل فقط لتمثيل الأحداث النادرة، لكنه اليوم يستعمل في مجالات متعددة. فمن الدراسة الشهيرة ل (Ladislaus Bortkiewics) عن حوادث إصابات الجنود بصكات الجياد في الجيوش أصبح اليوم توزيع بواسون يستعمل في شتى المجالات؛ منها مراقبة الجودة إحصائيا، تسيير ظواهر الانتظار، الاتصالات (عدد المكالمات في وحدة زمن)، كما يستخدم في الفيزياء النووية لدراسة عدد الجزيئات المنبعثة من مادة مشعة وفي البيولوجيا الدقيقة (microbiologie) لمراقبة تكاثر البكتيريا في حقل تجارب، كما يستخدم في البيولوجيا وحتى في علم الأحوال الجوي.

في مجال التسيير، يستخدم توزيع بواسون بشكل خاص عند دراسة مسائل متعلقة "بظواهر الانتظار"؛ ففي هذا النوع من المسائل، كثيرا ما يفترض أن وصول الزبائن إلى مكان الخدمة يتبع توزيع بواسون. من أمثلة ذلك: عدد الطائرات التي تصل إلى المطار في وحدة زمن، عدد البواخر التي تصل إلى ميناء في وحدة زمن، عدد الزبائن الذين يصلون إلى مكتب بريدي في وحدة زمن، عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي، عدد الحالات الاستعجالية التي تصل إلى مستشفى، ... تسمى هذه الظواهر في نظرية صفوف الانتظار "بظواهر الوصول".

مثال1. بينت دراسة أن عدد حوادث العمل في معمل معين يتبع توزيع بواسون بمعدل حادثتين يوميا.

أوجد احتمال أن لا يسجل أي حادث في يوم معين. أوجد احتمال حادث على الأقل في يوم:

$$P(X = 0) = \lambda^x * e^{-\lambda}/x! = \lambda^0 * e^{-\lambda}/0! \Rightarrow \mathbf{P(X = 0) = e^{-\lambda}} = e^{-2}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - [\lambda^0 * e^{-\lambda}/0!] \Rightarrow \mathbf{P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}} = 1 - e^{-2}$$

مثال2. بينت دراسة إحصائية سابقة أن عدد السيارات التي تصل إلى محطة بنزين معينة بين الساعة 12:00 و12:05 هو في المتوسط 3 سيارات، كما بينت الدراسة أن عدد السيارات التي تصل إلى المحطة يتبع توزيع بواسون. أوجد احتمال أن تصل 4 سيارات بين 12:00 و12:05.

متوسط عدد السيارات في الساعة = 2 * 3 = 6 ومنه:

$$P(X=4) = 6^4 * e^{-6}/4! = 1296 * e^{-6}/24 = 54 * e^{-6}$$

في الأخير، ينبغي الإشارة إلى أن لتوزيع بواسون وأيضا للتوزيع الثنائي خصائص مهمة لا يتسع المقام لذكرها في إطار هذا الدرس، ولكن سنتعرض لبعضها في التطبيقات، لذلك نحيل الطالب إلى مطالعتها في المراجع المتخصصة؛ كما توجد توزيعات أخرى مهمة نظرا لتعدد استخداماتها مثل التوزيع المتماثل (distribution uniforme)، لم نتطرق لها في هذا الدرس، ندعو الطالب لاستكمالها من خلال بحثه الخاص.

---

[1] أنظر دروزبيك 1997، ص 262.

4 خلاصة : الجدول الملحق يلخص أهم النقاط حول التوزيعات المتقطعة الشهيرة.

التوزيع	متى يستخدم	القيم الممكنة للمتغيرة	الاحتمال	التوقع والتباين
برنولي **$X \sim B(1, p)$**	تجربة واحدة (غير مكررة) تقبل نتيجتين.	$X = \{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p = q$	$\mu = p, \quad \sigma^2 = pq$
الثنائي **$X \sim B(n, p)$**	تجارب ثنائية النتيجة، مكررة ومستقلة (p ثابت).	$X = \{0,1,2\ldots,n\}$	$P(X = x) = C^x_n p^x q^{n-x}$ $C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$	$\mu = np, \sigma^2 = npq$
باسكال (الثنائي السالب)	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على عدد r من النجاحات في تجارب برنولية مكررة.	$X = \{r, r+1, r+2, \ldots, +\infty\}$	$P(X = x) = C^{r-1}_{x-1} p^r q^{x-r}$	$\mu = r/p$, $\sigma^2 = rq/p^2$
الهندسي	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على النجاح الأول في تجارب برنولية مكررة.	$X = \{1,2,\ldots,+\infty\}$	$P(X = x) = q^{x-1}p$	$\mu = 1/p$, $\sigma^2 = q/p^2$
التوزيع المتعدد	هو تعميم للتوزيع الثنائي على تجربة مكررة متعددة النتائج.	$\forall i, 0 \le xi \le Ni$, $\sum_{i=1}^{k} xi = n$, $\sum_{i=1}^{k} Ni = N$	$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \dfrac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$	$E(X_k) = np_k$ $V(X_k) = np_k q_k$
بواسون **$X \sim P(\lambda)$** **$\lambda > 0$**	X عدد النجاحات في عدد كبير من التجارب البرنولية (عدد الوحدات التالفة في شحنة). أو عدد من الأحداث في فترة زمن.	$X = \{0,1,2,\ldots,+\infty\}$	$P(X = x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $P(X = 0) = e^{-\lambda}$ $P(X \ge 1) = 1 - e^{-\lambda}$	$E(x) = V(x) = \lambda$

المبحث 2. **التوزيعات الاحتمالية الشائعة المستمرة**

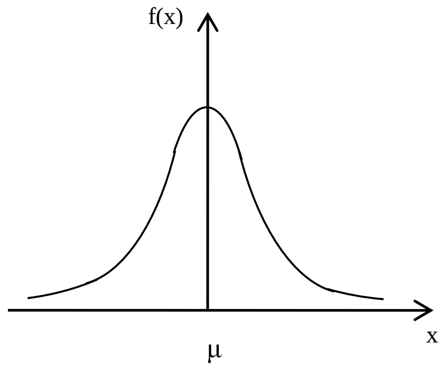
1 التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس قوس[1] D. Normale ou D. de Laplace -Gausse

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. فلو اخترنا بالصدفة مئة أو ألفا من المارين في شار ع ما وقسنا أطوالهم لوجدنا نسبة كبيرة منها قريبة من متوسط ما، ونسبة قليلة من طوال القامة ونسبة مقاربة لها من قصار القامة. ومثل هذا بالنسبة للأوزان. ولو مثلنا هذه البيانات في معلم متعامد متجانس لكان المنحنى الذي يمثل النسبة، أو ما يمكن أن نسميه الاحتمال، ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط وهي صفات التوزيع الطبيعي (الشكل9) :

(أ) صيغة القانون

تكتب دالة الكثافة لمنحنى للتوزيع الطبيعي كما يلي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty}$$



رسم**1 الشكل العام للتوزيع الطبيعي**

حيث μ و σ هما على التوالي التوقع والانحراف المعياري. ونكتب $X \sim N(\mu, \sigma)$

دالة التوزيع (الدالة التجميعية) للتوزيع الطبيعي تكتب كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

المتغيرة المركزية أو المعيارية : تستخدم المتغير المعياري $Z = (X-\mu)/\sigma$ لتكوين الجداول الإحصائية للاحتمالات:

$F(z) = P(Z \le z)$ أو $P(0 \le Z \le z)$،

حيث تسمح بكتابة الدالة f وF بدلالة مجهول واحد Z بدلا من 3 مجاهيل x وμ و σ وذلك كما يلي:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty}$$

$$F(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

بالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرتين X و Z، فإن Z تتبع نفس توزيع X أي التوزيع الطبيعي. ونعلم أن:

[1] باسم العالمان الرياضيان الفيزيائيان و الفلكيان الفرنسي Pière Simon de Laplace (1749-1827) والألماني Carl Freidrich Gauss - الصورة لهذا الأخير-، (1777-1855) الذين كانا من أوائل من اكتشف هذا القانون. أما من أعطاه تسمية التوزيع الطبيعي فهو Pearson في 1893. أنظر J. J. Droesbeke (1997)، ص329 .

$$V(Z) = 1 \qquad E(Z) = 0$$

(ب) خصائص التوزيع الطبيعي

من خصائص التوزيع الطبيعي أنه يعتبر معتدلا لا مدببا ولا مفلطحا، حيث يعتبر معامل التفلطح $\alpha_4 = 3$ للتوزيع الطبيعي معيارا لاعتدال المنحنيات.

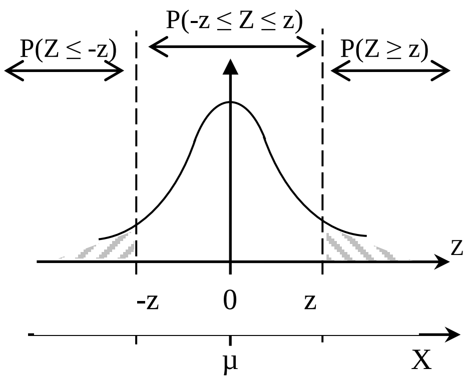
من خصائص التوزيع الطبيعي أيضا أنه متماثل حول القيمة المتوقعة $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$

تماثل منحنى X حول المتوسط (أنظر الشكل 3) يعني تماثل لمنحنى Z حول 0، مما يعني أنه من أجل أي قيمة للمتغيرة المعيارية

: $z > 0$

$$P(0 \le Z \le z) = P(-z \le Z \le 0) = P(-z \le Z \le z) / 2$$

$$P(Z \le -z) = 1 - P(Z \le z) = P(Z \ge z)$$



رسم 2 استخدام تماثل الوزيع الطبيعي في حساب الاحتمالات

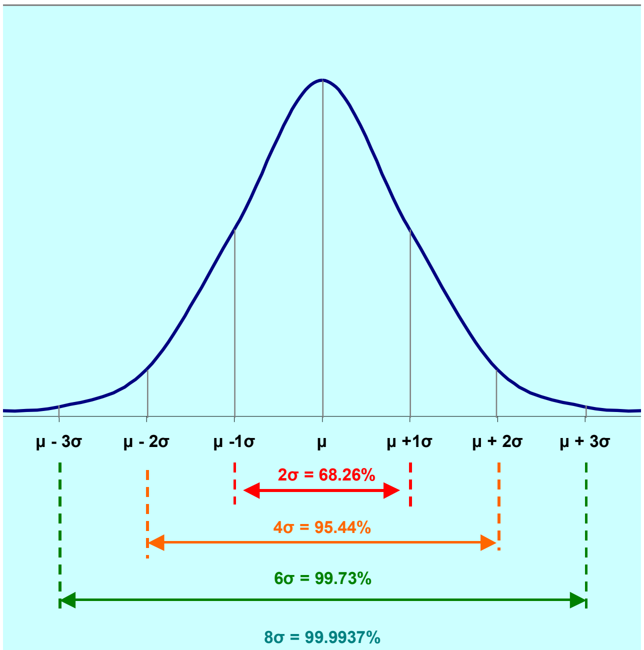
و لقد تم باستخدام المتغيرة المعيارية Z حساب الاحتمالات (المساحات) تحت المنحنى ومنها خاصة:

$$P(-\sigma \le X \le \sigma) = P(-\sigma \le Z \le \sigma) = 0.6837,$$

$$P(-2\,\sigma \le X \le 2\,\sigma) = P(-2 \le Z \le 2) = 0.9544,$$

$$P(-3\,\sigma \le X \le 3\,\sigma) = P(-3 \le Z \le 3) = 0.9973.$$

هذه القيم وغيرها متوفرة في الجداول الإحصائية التي نجدها في الكثير من المراجع، كما يمكن حسابها باستخدام الحاسوب.



رسم 3 المساحات الأساسية تحت منحنى التوزيع الطبيعي

مثال: باستعمال الجداول الاحصائية 1) أحسب : $P(0 \le Z \le z)$ حيث $z = 1, 2, 3$

2) أحسب $P(-z \le Z \le z)$ من أجل نفس القيم ل z.

1) 0.3413 ، 0.47725 ، 0.49865

2) 0.6827، 0.9545، 0.9973

(ج) **العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الثنائي**

في حالة n كبيرة وp غير قريب من 0 يمكن اعتبار التوزيع الثنائي كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي. ويعطي التوزيعان نتائج أكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة أكثر. ونكتب:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(a \le z \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz, \qquad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

ويسرع تقارب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي كون p قريب من 0.5.

قاعدة التقريب:

- **عموما نعتبر التقريب إلى التوزيع الثنائي ملائما عندما np و nq كلاهما أكبر من 5.**
- عدد من الاحصائيين[1] يعتمد قاعدة أخرى هي أن يكون أحد الشرطين التاليين متوفرين:

$$npq \ge 9 \qquad ou \qquad n \ge 20, np \ge 10, nq \ge 10$$

[1] أنظر دراوزبيك 1997. ص 262.

2 التوزيع الأسي Distribution exponentielle

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة...في العلوم الدقيقة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة الذرات المشعة (atomes radioactives) قبل أن تتفكك، حيث يعبر الوسيط عن اللحظة التي يبقى فيها نصف المجتمع الأصلي[1].

من الضروري فهم الآتي: كقاعدة عامة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما إذا كان لها متوسط ثابت $1/\lambda$ وكانت هذه الظاهرة لا تخضع للتقادم (vieillissement) أي أن مدة حياة الظاهرة بعد لحظة ما T لا تتبع اللحظة T؛ أي لا تتأثر بالمدة التي دامتها الظاهرة من قبل. مثلا قد نستبعد استخدام التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة آلة عاملة قبل تعطلها لأن احتمال تعطلها في لحظة ليس مستقلا عن المدة التي عملتها الآلة من قبل، كذلك الأمر بالنسبة لمدة حياة الإنسان.

عمليا، نتحقق من دقة تمثيل التوزيع الأسي _أو أي توزيع آخر_ لظاهرة ما من خلال تقنيات اختبارات الفروض، وبالتحديد اختبار التجانس و التعديل.

نشير أخيرا إلى أن للتوزيع الأسي علاقة بالتوزيع بواسون، فإذا كان وقوع أحداث ما يتبع هذا التوزيع، فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسي؛ كمثال على ذلك، إذا كان وصول الزبائن إلى مركز خدمة ما يتبع التوزيع بواسون فإن المدة الزمنية بين وصول زبون "أ" والزبون الموالي تتبع التوزيع الأسي. تتبين هذه العلاقة عند استنتاج صيغة القانون الأسي.

(أ) صيغة القانون الأسي أو دالة الكثافة و الدالة التجميعية للتوزيع.

بينت دراسة أن عدد حوادث العمل في معمل معين تتبع توزيع بواسون بمعدل λ حادث يوميا.

أوجد احتمال أن يسجل حادث على الأقل (حادث أو أكثر) في مدة t يوم.

$P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - [\lambda^{0t} * e^{-\lambda t}/0!] \quad => \mathbf{P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}}$

لنرمز ب T للزمن (باليوم) بين حادثين إذن سيكون لدينا $f(t)$ دالة الكثافة للزمن بين حادثين، و $F(t) = P(T \leq t)$ دالة التوزيع ل T.

لنحسب احتمال P أن يكون الزمن بين حادثين يوم أو أقل:

لدينا $P = P(T \leq t = 1)$ إذن:

$P = F(t = 1)$ .... (1)

لاحظ من ناحية أخرى أن P هو معادل لاحتمال أن يسجل على الأقل حادث في يوم معين:

$P = P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}$ ....(2)

من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\mathbf{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}}}$ ....(3)

و منه $f(t) = F(t)' = (1 - e^{-\lambda t})'$

إذن $\mathbf{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$

قاعدة: إذا كان حدث عشوائي ما يتكرر في الزمن وفق توزيع بواسون:

---

[1] راجع موقع موسوعة Wikipédia .

$$\boxed{p_\tau(x) = \frac{(\lambda\tau)^x e^{-\lambda\tau}}{x!}}$$

فإن الزمن T بين حادثين يتبع التوزيع التالي:

$$f(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\tau} & , \quad \tau > 0 \\ 0 & , \quad \tau \le 0 \end{cases}$$

حيث λ عدد حقيقي موجب.

و يسمى هذا التوزيع التوزيع الأسي ويسمى أيضا التوزيع الأسي السالب لعلاقته بتوزيع بواسون.

(ب) خصائص التوزيع الأسي

$$\mu = 1/\lambda \quad , \quad \sigma^2 = 1/\lambda^2 \quad , \quad Med = \mu\ln(2) < \mu \quad , \quad M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

3 توزيع قاما Distribution gamma

توزيعي قاما و بيتا يمثلان مجموعة واسعة من التوزيعات ذات معلمتين تتميز بمرونة وقدرة على توليد توزيعات متعددة حسب قيم المعلمتين. ندرس هذين التوزيعين أيضا لعلاقتهما بالتوزيعات F، t، و كا2. يستخدم توزيع قاما لتمثيل بعض الظواهر مثل توزيع الدخل والادخار تحت شروط معينة[1].

(أ) صيغة القانون.

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع قاما إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0 \quad , & x \le 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0, \beta > 0$$

حيث $\Gamma(\alpha)$ هي الدالة قاما: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad \alpha > 0$

ونكتب $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

(ب) خصائص توزيع قاما

$$\boldsymbol{\mu = \alpha\beta \quad , \quad \sigma^2 = \alpha\beta^2, \quad M(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}}$$

Pour $\alpha>1$: $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ et si $\alpha \in N$: $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

من خصائص توزيع قاما علاقته بالتوزيع الأسي كما سنرى في السلسلة.

مثال. أحسب ما يلي:

$$\int_0^\infty t^4 e^{-t}dt, \qquad \int_0^\infty x^6 e^{-x}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1/2}}dx, \qquad \Gamma(7), \quad \Gamma(4.5), \qquad \Gamma(2.5).$$

---

[1] أنظر: آيفازيان و آخرون، مبادئ النمذجة و المعالجة الأولية للبيانات، سلسلة : Mathématiques، Editions Mir، موسكو، 1983، ترجمه من الروسية إلى الفرنسية جيلالي مبارك، 1986. ص158.

$$\int_0^{\infty} t^4 e^{-t} dt = \Gamma(5) = 4! = 24, \int_0^{\infty} x^6 e^{-x} dx = \Gamma(7) = 6! = 720, \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx = \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(4.5) = \Gamma(3.5+1) = 3.5\Gamma(3.5) = 3.5(2.5)\Gamma(2.5) = 3.5(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 3.5(2.5)(1.5)(0.5)\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(7) = 6! = 720, \qquad \Gamma(2.5) = 1.5\Gamma(0.5) = 1.5\sqrt{\pi}$$

مثال2. أحسب المتوسط والتباين للمتغيرات العشوائية X و Y و Z المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 e^{-x/2}}{2^5 \Gamma(5)}, & x > 0 \\ 0 \quad , & x \le 0 \end{cases}, \quad f(y) = \begin{cases} \frac{y^3 e^{-y/4}}{4^4 (6)}, & y > 0 \\ 0 \quad , & y \le 0 \end{cases}, \quad f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 e^{-z}}{6}, & z > 0 \\ 0 \quad , & z \le 0 \end{cases}$$

$$\mu_x = \alpha\beta = 5(2) = 10, \sigma^2{}_x = \alpha\beta^2 = 5(2^2) = 20, \mu_y = 4(4) = 16, \sigma^2{}_y = 4(4^2) = 64, \mu_z = 3(1) = 3, \sigma^2{}_z = 3$$

4 توزيع بيتا Distribution bêta

يتميز توزيع بيتا بمرونته الكبيرة تبعا لقيم معلمتيه (أنظر الرسم 14) حيث يستخدم لحساب توزيع t^2، F، التوزيع الثنائي، الثنائي السالب وغيرها[1]، وتستخدم لتمثيل بعض المتغيرات التي تتراوح بين 0 و 1، مثل نسبة ما كنسبة التالف أو المبيعات، إلخ.

أ) **صيغة القانون**.

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع بيتا إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0 < x < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \qquad (\alpha, \beta > 0)}$$

حيث $B(\alpha, \beta)$ هي الدالة بيتا:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du, \qquad \alpha, \beta > 0$$

و نكتب $X \sim B(\alpha, \beta)$

$\alpha = 4, \beta = 2$

ب) **خصائص توزيع بيتا**

$$\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

ج) **العلاقة بين الدالتين قاما وبيتا:**

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

مثال. أحسب ما يلي:

$$B(3,4), \qquad B(1/2,1/2), \quad B(n,2), \qquad B(1,n), \qquad B(n,1) \quad (n \in N)$$

[1] المرجع السابق.

$$B(3,4)=\frac{(3-1)!(4-1)!}{(7-1)!}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60},\quad B(1/2,1/2)=\frac{(\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})}{(1/2)+(1/2)}=\pi,$$

$$B(n,\ 2)=\frac{(n-1)!1!}{(2+1)!}=\frac{1}{n(n+1)!},\qquad B(1,n)=\frac{1(n-1)!}{n!}=\frac{(n-1)!}{n(n-1)!}=\frac{1}{n},\qquad B(n,1)=\frac{(n-1)!1}{n!}=\frac{1}{n}$$

مثال2. أحسب ما يلي: $\int_0^1 x(1-x)dx$, $\quad \int_0^1 x^4(1-x)^3dx,\quad B(3,2),$

$$B(3,2)=1/[n(n+1)]=1/[3(4)]=1/12$$

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3dx=B(5,4)=\frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)}=\frac{4!3!}{8!}=\frac{1}{280},\qquad \int_0^1 x(1-x)dx=B(2,2)=\frac{1!1!}{3!}=1/6$$

وباستعمال العلاقة $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ نجد أن دالة الكثافة للتوزيع بيتا تكتب أيضا:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1\\ 0\qquad , & ailleurs\end{cases}$$

للتوزيعين قاما وبيتا علاقة بعدد من التوزيعات المهمة كالتوزيع الأسي وتوزيع كاي تربيع، من ذلك **مثلا** أن التوزيع الأسي هو حالة خاصة من توزيع قاما عندما **α = 1 , β = 1/λ**.

مثال3. أحسب النسبة المتوقعة للإنتاج التالف والتباين، إذا كانت نسبة الإنتاج التالف تتبع التوزيع التالي:

$$f(x)=\begin{cases}6(1-x)^5, & 0<x<1\\ 0\quad , & \text{sinon}\end{cases}$$

من المثال السابق لدينا: $B(1,n)=1/n \Rightarrow 6=1/B(1,6).$

بوضع α و β يساويان 1 و 6 على التوالي، نجد أن $X\sim B(1,6)$

ومنه: $\mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=1/2,\qquad \sigma^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}=\frac{4}{16(5)}=1/20.$

مثال4. نسبة الإنتاج المباع في مؤسسة تتبع التوزيع التالي. أحسب النسبة المتوقعة، واحتمال أن تبلغ النسبة أكثر من 35% .

$$f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1\\ 0 & ,\ \text{sinon}\end{cases}$$

$$12=3*4\Rightarrow 12=1/B(3,2)\Rightarrow X\sim B(3,2)\Rightarrow \mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{3}{3+2}=3/5=60\%$$

$$P(X>0.35)=\int_{0,35}^1 12x^2(1-x)dx.$$

$$soit: v=x^2dx\ et\ u=1-x\Rightarrow P(X>0.35)=12\left(\left[(1-x)\frac{x^3}{3}\right]_{0,35}^1+\int_{0,35}^1 x^2dx\right)=0.3125$$

5 خلاصة

الجدول التالي يلخص خصائص التوزيعات الاحتمالية المستمرة الأكثر استخداما.

خصائص التوزيع	دالة الكثافة ، التوقع والتباين		التوزيع
$P(Z \le -z) = 1- P(Z \le z) = P(Z \ge z)$ $P(-\sigma \le X \le \sigma) =$ $P(-1 \le Z \le 1) = 0.6837$, $P(-2\sigma \le X \le 2\sigma) =$ $P(-2 \le Z \le 2) = 0.9544$, $P(-3\sigma \le X \le 3\sigma) =$ $P(-3 \le Z \le 3) = 0.9973$.	$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty}$ $E(Z) = 0, V(Z) = 1$		التوزيع الطبيعي المعياري $X \sim N(0, 1)$
$P(X \le \mu) = 0.63$	$\mu = 1/\lambda$, $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$	$f(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\tau} & , \quad \tau > 0 \\ 0 & , \quad \tau \le 0 \end{cases}$	التوزيع الأسي
$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \qquad \alpha > 0$	$\mu = \alpha\beta$, $\sigma^2 = \alpha\beta^2$	$\begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0 \quad , & x \le 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0, \beta > 0$	توزيع قاما $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$
$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du, \qquad \alpha, \beta > 0$ $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0 < x < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \qquad (\alpha, \beta > 0)$ $\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$		توزيع بيتا $X \sim B(\alpha, \beta)$