الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية

المبحث 1: مفهوم المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعتها الاحتمالية

1. مفهوم المتغير العشوائي

هو قيمة متغيرة يلحق بقيمها احتمالات تحقق كل قيمة. يرمز للمتغيرة ع بحرف لاتيني كبير (X,Y,Z , …) ونميز بين م ع المتقطع والمتصل أو المستمر.

مثال : في تجربة إلقاء مكعب يمكن أن نسمي الوجه الذي يستقر عليه الكعب متغيرة عشوائية X. القيم الممكنة لX هي: 1، 2، 3، 1، 2، 3. بكل قيمة يمكن أن نلحق احتمال تحققها، وهو هنا 1/3. ونكتب مثلا :

$P(X = 1) = f(1) = 2/6,\ P(X = 2) = f(2) = 2/6$,…

لاحظ أن القيم الممكنة ل X (1، 2، 3) هي متنافية، ولذلك فإن مجموع احتمالاتها يساوي 1. $\sum_{x=1}^{6} P(X = x) = 1$

مثال 2. في تجربة إلقاء قطعة نقدية مرتين يمكن أن نعين المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات الحصول على كتابة. في هذه الحالة القيم الممكنة ل X هي 0، 1، 2. لاحظ أنه يمكن تعيين متغيرات عشوائية أخرى انطلاقا منن نفس التجربة، مثلا Y عدد مرات الحصول على صورة، وهو متغير يأخد القيم 0، 1، 2، ثم المتغير Z بحث:

$Z = X - Y$ …

القيم الممكنة ل Z هي 0، 2، -2. الاحتمالات الملحقة بقيمها يمكن حسابها كما يلي:

$P(Z = 0) = P(X - Y = 0) = P(X = 0 \text{ et } Y = 0 \text{ ou } X = 1 \text{ et } Y = 1 \text{ ou } X = 2 \text{ et } Y = 2) \Rightarrow$

$P(Z = 0) = 0 + P(X = 1 \text{ et } Y = 1) + 0 = 2 * 0.5^2 = \mathbf{0.5}$

2. المتغير العشوائي المتقطع

و تسمى أيضا م ع منفصل، وهي التي تأخذ عددا منتهيا من القيم الممكنة في مجال مغلق.

مثال: داخل المجال المغلق [2, 5] المتغيرة X المعرفة في المثال الأول تأخذ 4 قيم ممكنة.

1.2. التوزيع الاحتمالي للمتغيرة المتقطعة

هو مجموعة القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغير. نرمز للمتغير بحرف كبير وللقيم التي تأخذها المتغير بحرف صغير. نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$. وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية.

مثال: التوزيع الاحتمالي لم ع للمثال الأول (إلقاء مكعب نرد) يكتب كما يلي:

X	1	2	3	
P(X = x)	2/6	2/6	2/6	1

مثال 2. التوزيع الاحتمالي ل X، عدد مرات الصورة في رميتين لقطعة نقدية:

X	0	1	2	
P(X = x)	1/4	2/4	1/4	1

2.2. شروط دالة الكثافة للمتغير المتقطع

نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$ وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية. لكي يمكن اعتبار دالة ما، أيا كانت، دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق شرطان اثنان:

$$1) \quad f(x) \geq 0$$
$$2) \quad \sum_{x} f(x) = 1$$

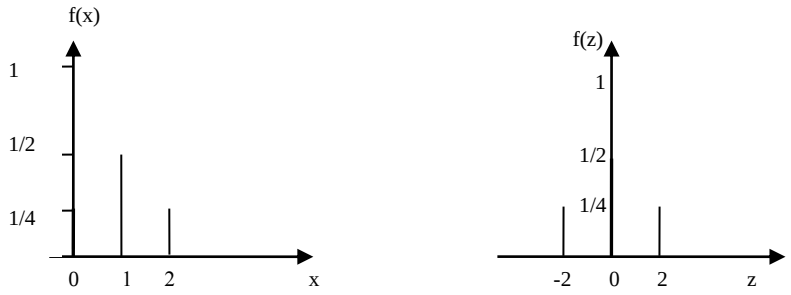
مثال: نأخذ دالة الكثافة ل X نتيجة لإلقاء حجر نرد: $f(1) = f(2) = f(3) = 2/6 \geq 0$,

الشرط الأول محقق، والشرط الثاني أيضا لأن: $\Sigma f(x) = 2/6 + 2/6 + 2/6 = 1$

3.2. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية ل م ع المتقطعة

تمثيل المتغير العشوائي المتقطع ليس من خلال منحنى ولكن من خلال أعمدة متوازية على محور X.

مثال: نمثل بيانيا منحنيات دوال الكثافة ل X و Z المعرفة على إلقاء قطعة نقدية مرتين.



رسم 1 التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغير العشوائي المتقطع

4.2. دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي المتقطع

تعرف دالة التوزيع – وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" – كما يلي:

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x)}$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

إذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن $F(x)$ يمكن تعريفها كما يلي:

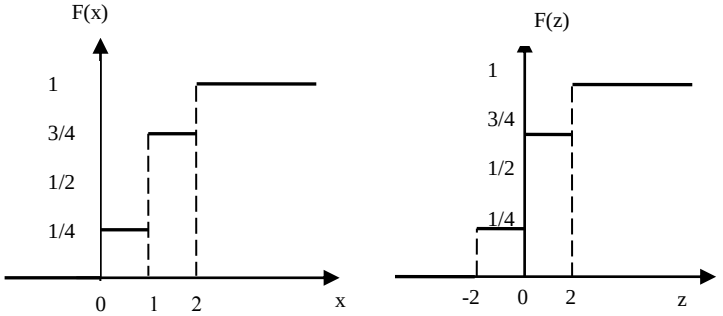
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & , \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \dots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n), & \quad x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

مثال: أوجد قيم $F(x)$ و$F(z)$ للأمثلة السابقة

ومثلهما بيانيا.

X	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

Z	-2	0	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1



رسم 2 التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة

ملاحظة. تأخذ دالة التوزيع للم ع المتقطع شكلا سلميا، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي 1.

3. مفهوم المتغير العشوائي المستمر وتوزيعه الاحتمالي

1.3. تعريف المتغير العشوائي المستمر

هو متغير ع يأخذ عددا لا متناهيا من القيم في مجال محدود، أو يأخذ أي قيمة داخل هذا المجال. من أجل هذا فأن وحدات قياس المتغير المستمر تكون مستمرة مثل الزمن، الوزن، المسافة، الحجم، ...

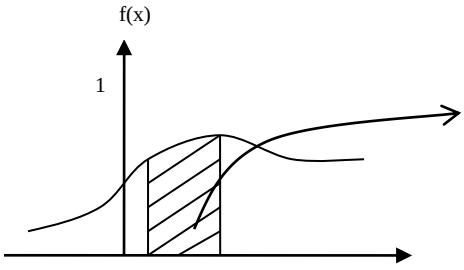
2.3. التوزيع الاحتمالي المستمر

هو مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرة ع المستمرة والاحتمالات الملحقة بها. نسمي توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الاحتمال، وهي ممثلة بمنحنى متصل.

لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر. $P(X=x) \to 0$ لذلك فإن دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

لاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغيرة ع المتقطعة.



رسم3 التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المستمرة

3.3. خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر

باستبدال إشارة التكامل بإشارة المجموع نجد أن شروط دالة الكثافة الاحتمالية للم ع المستمرة تكتب كما يلي :

$$1)\ f(x) \geq 0$$
$$2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

من البديهي إذا أن منحنى دالة الكثافة لا يمكن أن ينزل أسفل محور الم ع، كما أن المساحة الإجمالية بين المنحنى والمحور الأفقي تساوي الواحد.

هذه الخصائص تفيدنا في حساب احتمالات بعض المجالات من خلال احتمالات مجالات أخرى.

مثال: أوجد قيمة الثابت C التي تحقق الشرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الاحتمالية في الدالة التالية:

- ✓ أحسب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال من 1 إلى 2.
- ✓ أحسب احتمال أن تكون X لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} Cx^2dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = 1 \Rightarrow C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9C = 1 \Rightarrow C = 1/9$$

لكي تكون x دالة كثافة يجب أن يكون C = 1/9 .

$$P(1 < x \leq 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (1/9)x^2dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

$$P(1 > x > 2) = 1 - P(1 < x < 2) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

4.3. دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المستمرة

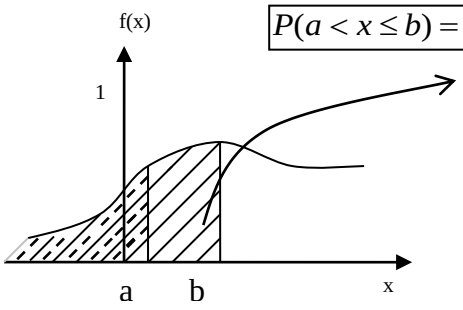
تعرف دالة التوزيع للمتغيرة المستمرة كما يلي:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du}$$

لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغيرة المستمرة. السبب في ذلك أننا نهتم، في حالة المتغيرة المستمرة، باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأيسر التعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل في كل مرة. يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث b > a .

لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال]a, b[:

$$\boxed{P(a < x \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)}$$



رسم 4 حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

مثال:

أوجد دالة التوزيع للمتغيرة المذكورة في المثال السابق.

استخدم دالة التوزيع لحساب الاحتمال: P(1< x <2).

$$* x < 0: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du = 0$$

$$*0 \le x < 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}u^2 du = \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

$$* x \ge 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}u^2 du + \int_{3}^{x} 0du = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/27 & 0 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases} \qquad P(1 < x \le 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$

4. خلاصة

يتم تعريف التوزيع الاحتمالي (أو القانون الاحتمالي) لمتغير عشوائي من خلال تحديد القيم الممكنة للمتغير و الاحتمالات المقابلة لها.

يتم هذا التحديد إما من خلال جدول (جدول التوزيع الاحتمالي) أو دالة، تسمى دالة كثافة الاحتمالية.

لكي نقول عن دالة ما أنها دالة كثافة احتمالية يجب أن تكون موجبة دوما و أن يكون مجموع الاحتمالات مساويا للواحد.

الدالة التجميعية (أو دالة التوزيع) تمثل احتمال مجال من أصغر قيمة للمتغيرة إلى نقطة ما:

$F(x) = P(X \le x) = \sum_{u \le x} f(u)$ في حالة م متقطعة و $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ في حالة م مستمرة.

نظرا لتعريفها تأخذ دالة التوزيع مسارا متزايدا (أو ثابتا على أجزاء من المجال). تبرز أهمية الدالة التجميعية أكثر عندما تكون المتغيرة مستمرة لأننا نهتم حينها باحتمالات مجالات. يمكن استنتاج دالة الكثافة من خلال اشتقاق دالة التوزيع.

المبحث الثاني: التوقع الرياضياتي والتباين

مسألة: أرسلت مؤسسة عروضا إلى 4 عملاء. احتمال تلقي طلبية من العميل الأول هي 0.2، من العميل الثاني 0.3، من العميل الثالث 0.35 و0.4 من العميل الرابع. في انتظار ردود العملاء ما هو العدد المتوقع من الطلبيات؟

في العديد من الحالات لا يكفي حساب احتمال تحقق حدث أو أحداث معينة بل نحتاج للخروج بتوقع معين يلخص الوضعية المطروحة أمامنا. من جهة أخرى قد يصعب المفاضلة بين خيارات متاحة مقيمة بمبالغ معينة بسبب ارتباط كل مبلغ بمخاطرة مختلفة؛ من المعروف أن الاستثمارات الأكثر مردودية هي تلك التي تتضمن أكبر مخاطرة، فكيف يمكن أخذ في الحسبان المخاطرة والمبلغ المتوقع وبطريقة دقيقة وموضوعية؛ إن طريقة التوقع وبقية المفاهيم الأخرى الواردة أعلاه يمكن أن تساعدنا في ذلك.

1 التوقع الرياضياتي Espérance mathématique

يعرف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي متقطع كما يلي:

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}$$

و يعرف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر كما يلي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

نرمز للتوقع أحيانا ب μ أو μ_x.

مثال: نلقي قطعة نقدية 4 مرات. أحسب العدد المتوقع من المرات التي نحصل فيها على وجه.

Xعدد مرات وجه	0	1	2	3	4	المجموع
P(X)	$(1/2)^4$	$4\,(1/2)^4$	$6\,(1/2)^4$	$4\,(1/2)^4$	$(1/2)^4$	16/16 = 1
XP(X)	0	$4\,(1/2)^4$	$12\,(1/2)^4$	$12\,(1/2)^4$	$4\,(1/2)^4$	32/16 = 2

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)=32/16=2$$

العدد المتوقع هو مرتين من بين 4 رميات.

مثال 2. نلقي قطعة نقدية مرة واحدة. يربح اللاعب 20 دج إذا حصل على الرقم 2، ويربح 40 دج إذا حصل على الرقم 4، و60 دج إذا حصل على الرقم 6، ويخسر 10 دج إذا حصل على الرقم 1، 30 دج إذا حصل على الرقم 3، و50 دج إذا حصل على الرقم 5. تحقق مما إذا كانت اللعبة متوازنة (هل توقع الربح يساوي توقع الخسارة).

الجواب هو أن اللعبة غير متوازنة لأن توقع الربح أكبر من توقع الخسارة $E(x) = 30/6 = 5 > 0$

نتيجة الرمي	1	2	3	4	5	6	المجموع
نتيجة المراهنةX	-10	20	-30	40	-50	60	-
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	6/6
X*P(X=x)	-10/6	20/6	-30/6	40/6	-50/6	60/6	(120-90)/6>0

مثال3. أوجد التوقع الرياضي للمتغيرة ذات دالة الكثافة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x.0.dx+\int_{0}^{2} x(\frac{1}{2}x)dx+\int_{2}^{\infty} x.0.dx$$

$$E(x)=0+\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+0=\frac{4}{3}$$

1.1. توقع دالة

يستخدم توقع دالة عند حساب عدد من المقاييس مثل التباين، العزوم المركزية والعزوم المرتبطة بالأصل.

ليكن X م ع له دالة كثافة f(x)، و$y = g(x)$ م ع تابعة لها.

$$E(Y)=E(g(x))=\sum_x g(x)f(x)$$

$$E(Y)=E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

في حالة X م متصلة:

مثال1. نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، و$Y=X^2$. أحسب E(X) و E(Y) .

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X*P(X)	0	1/2	1/2	E(X) =1
X^2	0	1	4	
X^2*P(X)	0	1/2	1	$E(X^2) = 3/2$

مثال2: لتكن X م ع ذات دالة الكثافة التالية، و$Y = g(x) = 3x^2 - 2x$. أحسب E(Y).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(Y) = E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 - 2x)(0)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 - 2x)(x/2)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 - 2x)(0)dx$$

$$E(Y) = 0 + \int_0^2 (3x^2 - 2x)(x/2)dx + 0 = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[12 - \frac{16}{3}\right] = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

2.1. خصائص التوقع الرياضي

E (C) = C
E(CX) = CE(X)
E(X+Y) = E(X) + E(Y)
E(XY) = E(X)E(Y) إذا كانت المتغيرتان مستقلتان.

مثال: تتوقع مؤسسة أن تتلقى كل شهر 3 طلبيات من العميل A و4 من B .

- أحسب العدد المتوقع من الطلبيات المتلقاة من A في السنة.
- أحسب العدد الإجمالي المتوقع من الطلبيات المتلقاة في شهر.

يعين كل عميل من طرفه مندوبا عن كل طلبية لمتابعة إتمامها. كم تتوقع أن يلزم من مقابلة لتعريف مندوبي العميل A بمندوبي B.

E(12A) = 12E(A) = 12(3) = 36
E(A*B) = E(A)*E(B) = 4*3 = 12.
E(A + B) = E(A) + E(B) = 3 + 4 = 7

2 التباين والانحراف المعياري Variance et écart type

1.2. تعريف التباين

نرمز لتباين بـ Var(x) أو v(x) يعرف التباين لمتغير عشوائي كما يلي:

$$\sigma_X{}^2 = Var(X) = E\left[(X - \mu)^2\right]$$

و الانحراف المعياري هو جذر التباين. $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$.

في حالة المتغير العشوائي المتقطع: $V(X) = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$

في حالة المتغير العشوائي مستمر: $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$

مثال. نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، أحسب V(X) .

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X*P(X)	0	1/2	1/2	E(X) = μ =1
$(X-\mu)^2$	1	0	1	
$(X-\mu)^2 * P(X)$	1/4	0	1/4	V(X) = 1/2

مثال 2. لتكن X م ع ذات دالة الكثافة التالية؛ أحسب تباين X.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \qquad \sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx. \qquad \mu=4/3$$

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{0}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 * 0dx+\int_{0}^{2}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{+\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 0dx=0+\frac{1}{2}x\left(x^2-\frac{8x}{3}+\frac{16}{9}\right)_0^2+0$$

$$\sigma^2=\frac{1}{2}\left(x^3-\frac{8x^2}{3}+\frac{16x}{9}\right)_0^2=\frac{1}{2}\left(8-\frac{32}{3}+\frac{32}{9}\right)=\frac{4}{9}$$

2.2. خصائص التباين

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$V(CX) = C^2V(X)$, $V(C) = 0$

في حالة استقلال المتغيران عن بعضهما

$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

مثال: نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، أحسب V(X) باستخدام الصيغة

. **$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$**

لتكن المتغيرة $Y = 2X$. أحسب V(Y) ، نلقي حجر نرد ونسمي Z النتيجة المحصل عيها. أحسب تباين المتغيرة W حيث:
$W = Z - Y$

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X P(X)	0	1/2	1/2	E(X) = μ =1
$(X)^2$	0	1	4	
$(X)^2 * P(X)$	0	1/2	1	$E(X)^2 = 3/2$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (3/2) - 1 = 1/2$
$V(Y) = V(2X) = 2^2V(X) = 4\ (1/2) = 2.$
$V(W) = V(Z-2X) = V(Z) +V(2X) = V(Z) + 2^2V(X).$
$V(Z) = E(Z^2) – E(Z)^2 = (1/6)[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2]-(1/6)[1+2+3+4+5+6] = 70/6$
$V(W) = (70/6) + 4\ (1/2) = 82/6 = 13.67$

3.2. المتغير المعياري Variable centrée réduite

يمكن أن نلحق بأي متغير عشوائي X متغير معياري (يسمى أيضا المتغير المنحرف حول المتوسط) ويرمز لها X* . تلحق المتغير المعياري بالمتغير الحقيقي من أجل المقارنة لأن المتغير المعياري ليس له وحدة كالمتر أو الساعة ... وإنما هي تعبر عن كل قيمة x ل X من خلال المسافة بين x والتوقع μ محسوبة لس بالوحدة الأصلية وإنما بالانحرافات المعيارية.

$$\boxed{X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

من خلال خصائص التوقع والتباين نستخرج التوقع والتباين للمتغير المعياري.

$$E(X^*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\left[E(X) - E(\mu)\right] = 0$$

$$V(X^*) = E\left[(X^* - E(X^*))^2\right] = E\left[(X^* - 0)^2\right] = E(X^{*2}) = E\left(\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}E(X-\mu)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

مثال: أحسب X* من أجل متوسط 70، انحراف معياري 5، وX يساوي: 55، 60، 50، 75، 80، 70.

الجواب: القيم هي: -3، -2، -4، 1، 2، 0.

3. خلاصة

التوقع الرياضي و التباين هي أهم المؤشرات المعبرة عن خصائص المتغيرة و يحسبان كما يلي، حسب كون المتغيرة متقطعة أو مستمرة:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

لكل من التوقع و التباين 4 خصائص أساسية تتمثل فيما يلي:

E (C) = C توقع عدد ثابت	V(C) = 0
E(CX) = CE(X)	V(CX) = C²V(X)
E(X+Y) = E(X) + E(Y)	في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما V(X + Y) = V(X) + V(Y) V(X - Y) = V(X) + V(Y) ,
E(XY) = E(X)E(Y) في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما.	V(X) = E(X²) - E(X)²

من أجل المقارنة بين المتغيرات تستخدم المتغيرة المعيارية التي تسمح بالتعبير عن قيمة x ليس من خلال وحداتها الأصلية (كغ، متر، زمن، ...) وإنما بعدد الانحرافات المعيارية التي تفصل بين القيمة x والتوقع الرياضي.

التوقع الرياضي والتباين للمتغير المعياري $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ هما على التوالي 0 و 1.

لحساب التوقع الرياضي لدالة ما في X (مثلا التباين، أو X^2) نضرب قيم الدالة في الاحتمالات المقابلة لX:

$$E(Y) = E(g(x)) = \sum_x g(x) f(x)$$

$$E(Y) = E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$